СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959г., 699 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. М., Физматгиз, 1963г., 584 с.

ВЫВОД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА И ПЛЕНКИ, ОБВОЛАКИВАЮЩЕЙ СФЕРУ

Карсян А.Ж., Потетюнко Э.Н.
Ростовский Государственный Университет Путей Сообщения.
Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону, Россия

Изучается влияние пленки, покрывающей сферу, на величину силы воздействия набегающего потока и рассматривается следующая модель: твердая сфера радиуса *a*, покрытая тонкой пленкой толщины *h (h/a<<1)*, которая обтекается стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности заданную скорость *U = const*. Внешняя поверхность пленки деформированная и выписываются граничные условия на поверхности деформированной пленки.

Рассмотрим уравнение движения вязкой жидкости в напряжениях [1]

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} \qquad (1)$$

бесконечности заданную скорость *U = const*. Внешняя поверхность пленки деформированная и выписываются граничные условия на поверхности деформированной пленки.

Рассмотрим уравнение движения вязкой жидкости в напряжениях [1]

$$0 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{rr}^{\pm}}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta r}^{\pm}}{\partial \theta}\right) \qquad (2)$$

в проекции на тангенциальное направление:

$$0 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{r\theta}^{\pm}}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta\theta}^{\pm}}{\partial \theta}\right) \qquad (3)$$

В сферической системе координат уравнение несжимаемости имеет вид:

$$\frac{\partial V_r^{\pm}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta^{\pm}}{\partial \theta} + \frac{2V_r^{\pm}}{r} + \frac{V_\theta^{\pm} ctg\theta}{r} = 0 \qquad (4)$$

где плюс означает, что мы рассматриваем жидкость как внешнюю среду, а минус означает, что мы рассматриваем среду внутри пленки, покрывающей тело/

Граничные условия имеют вид:

1. на поверхности сферы:

$$V_r^{-} = 0;\ V_\theta^{-} = 0 \qquad (5)$$

2. на бесконечности:

$$V_r \to UP_1(\cos\theta);\quad V_\theta \to U\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$p = p_\infty = const \qquad (6)$$

3. на поверхности раздела пленка - набегающий поток выполняется кинематическое условие:

$$V_r\Big|_{a+h+\varsigma(\theta,t)} = \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \varsigma(\theta,t)}{\partial \theta} \qquad (7)$$

Для постановки граничных условий на границе раздела пленка – набегающий поток, следуя [1] дадим обобщенную формулировку, соответствующую системе уравнений (2-4). Используя принцип виртуальной работы [1] умножим уравнение (2) для внешней среды на вариацию компоненты скорости δV_r^{+}, уравнение (2) для внутренней среды на вариацию компоненты скорости δV_r^{-}, уравнение (3) для внешней среды на вариацию компоненты скорости δV_Θ^{+}, уравнение (3) для внешней среды на вариацию компоненты скорости δV_Θ^{-}, уравнение неразрывности для внешней среды (4) на δp_{rr}^{+}, уравнение неразрывности для внутренней среды (4) на δp_{rr}^{-}, кинематическое условие на поверхности раздела пленка – набегающий поток (7) на δp_{nn}, где δp_{nn} - это вариация напряжения, нормального к поверхности раздела. Проинтегрируем полученные уравнения по области $\Omega = R + Q$ (*R* - внутренняя среда (пленка), *Q* - внешняя среда (набегающий поток)). Используем формулу Гаусса – Остроградкого.

Сложим полученные интегральные равенства, проинтегрируем по частям слагаемые, содержащие пространственные производные. Учитывая, что внешняя нормаль к внутренней среде является внутренней нормалью к внешней среде, получим обобщенную формулировку, соответствующую (2-4).

$$\frac{1}{\rho}\left(\int_{\Omega}\left(-p_{rr}{}^{+}\frac{\partial\left(\delta V_r{}^{+}\right)}{\partial r}-p_{\theta r}{}^{+}\frac{\partial\left(\delta V_r{}^{+}\right)}{\partial\theta}\right)d\Omega\right)+\frac{1}{\rho}\left(\int_{\Omega}\left(-p_{rr}{}^{-}\frac{\partial\left(\delta V_r{}^{-}\right)}{\partial r}-p_{\theta r}{}^{-}\frac{\partial\left(\delta V_r{}^{-}\right)}{\partial\theta}\right)d\Omega\right)+$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(-\int_{\Omega}\left(p_{r\theta}{}^{+}\frac{\partial\left(\delta V_\theta{}^{+}\right)}{\partial r}+p_{\theta\theta}{}^{+}\frac{\partial\left(\delta V_\theta{}^{+}\right)}{\partial\theta}\right)d\Omega\right)+$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(-\int_{\Omega}\left(p_{r\theta}{}^{-}\frac{\partial\left(\delta V_\theta{}^{-}\right)}{\partial r}+p_{\theta\theta}{}^{-}\frac{\partial\left(\delta V_\theta{}^{-}\right)}{\partial\theta}\right)d\Omega\right)+\int_{\Omega}\frac{2V_r{}^{+}}{r}\delta p_{nn}{}^{+}d\Omega+\int_{\Omega}\frac{V_\theta{}^{+}ctg\,\theta}{r}\delta p_{nn}{}^{+}d\Omega-$$

$$-\int_{\Omega}V_r{}^{+}\frac{\partial\left(\delta p_{rr}{}^{+}\right)}{\partial r}d\Omega-\int_{\Omega}\frac{1}{r}V_\theta{}^{+}\frac{\partial\left(\delta p_{rr}{}^{+}\right)}{\partial\theta}d\Omega+\int_{\Omega}\frac{2V_r{}^{-}}{r}\delta p_{rr}{}^{-}d\Omega+\int_{\Omega}\frac{V_\theta{}^{-}ctg\,\theta}{r}\delta p_{rr}{}^{-}d\Omega-$$

$$-\int_{\Omega}V_r{}^{-}\frac{\partial\left(\delta p_{rr}{}^{-}\right)}{\partial r}d\Omega-\int_{\Omega}\frac{1}{r}V_\theta{}^{-}\frac{\partial\left(\delta p_{rr}{}^{-}\right)}{\partial\theta}d\Omega+ \tag{8}$$

$$+\int_{\Gamma}\left[-F^{+}\delta V_r{}^{+}+F^{-}\delta V_r{}^{-}-G^{+}\delta V_\theta{}^{+}+G^{-}\delta V_\theta{}^{-}-GG^{+}\delta p_{rr}{}^{+}+GG^{-}\delta p_{rr}{}^{-}\right]d\Gamma+$$

$$+\int_{\Gamma}\delta p_{rr}\left(V_r-\frac{\partial\varsigma(\theta,t)}{\partial\theta}\frac{V_\theta}{r}\right)d\Gamma=0$$

где $F^{+},F^{-},G^{+},G^{-},GG^{+},GG^{-}$ – заданы и определяют на границе раздела пленка - набегающий поток значения функций:

$$F^{+}=p_{rr}{}^{+}+p_{r\theta}{}^{+},\quad F^{-}=p_{rr}{}^{-}+p_{r\theta}{}^{-},\quad G^{+}=p_{r\theta}{}^{+}+p_{\theta\theta}{}^{+},\quad G^{-}=p_{r\theta}{}^{-}+p_{\theta\theta}{}^{-},$$

$$GG^{+}=V_r{}^{+}+\frac{1}{r}V_\theta{}^{+},\quad GG^{-}=V_r{}^{-}+\frac{1}{r}V_\theta{}^{-}.$$

Формула (8) дает обобщенную формулировку краевой задачи. Т.к. на поверхности раздела пленка - набегающий поток не заданы дополнительные поверхностные напряжения (радиальные и тангенциальные), которые могут задаваться как активные силы, например действующие на границе раздела свободная поверхность - воздух, полагаем

$$F^{+}=0,\ F^{-}=0,\ G^{+}=0,\ G^{-}=0,\ GG^{+}=0,\ GG^{-}=0.$$

Применение к зависимости (8) теорему Гаусса с целью исключения производных от вариаций и приравнивание к нулю коэффициентов стоящих при независимых вариациях δV_Θ, δV_r, δp_{rr}, δp_{nn} приводит к уравнениям Навье - Стокса вязкой несжимаемой жидкости, уравнению неразрывности и условиям на границе раздела пленка - набегающий поток:

1. кинематические условия (равенства скоростей):

$$V_r{}^{+}=V_r{}^{-},\quad V_\theta{}^{+}=V_\theta{}^{-},\quad V_r=\frac{\partial\varsigma(\theta,t)}{\partial\theta}\frac{V_\theta}{r} \tag{9}$$

2.динамические условия (равенство нормальных и касательных напряжений):

$$p_{r\theta}{}^{+}=p_{r\theta}{}^{-},\quad p_{rr}{}^{+}=p_{rr}{}^{-},\quad p_{\theta\theta}{}^{+}=p_{\theta\theta}{}^{-} \tag{10}$$

Последнее равенство является следствием первых двух динамических условий, кинематического условия и уравнения неразрывности. Решая краевую задачу, находим силовое воздействие потока на сферу, покрытую пленкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Коннор Дж.,Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979, 264 с.