где $\tilde{\delta}_{bd}^{ac} = \delta_b^a \delta_d^c + \delta_d^a \delta_b^c$

Теорема 2. Если 5-мерное многообразие Кенмоцу является контактно-антиавтодуальным многообразием, то его скалярная кривизна к = -20.

В силу справедливости теоремы 1, была доказана следующая теорема:

Теорема 3. 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной Ф- голоморфной секционной кривизны с.

Учитывая указанные результаты и результаты [12], получаем:

Теорема 4. 5-мерное многообразие Кенмоцу *M* является контактно-автодуальным многообразием тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий, снабженному канонической косимплектической структурой:

1) $\mathrm{C}^2 \times \mathrm{R}$; 2) $\mathrm{C}P^2 \times \mathrm{R}$; 3) $\mathrm{C}H^2 \times \mathrm{R}$,

где C^2, $\mathrm{C}P^2$, $\mathrm{C}H^2$ − комплексное евклидово, комплексное проективное и комплексное гиперболическое двумерные пространства, соответственно.

В силу справедливости теоремы 2, была доказана следующая теорема:

Теорема 5. 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой ξ = -4.

Таким образом, полученные результаты вскрыли интересные связи между такими характеристиками многообразий Кенмоцу, как контактная автодуальность и постоянство голоморфной секционной кривизны, как контактная антиавтодуальность и эйнштейновость, и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1978. V. 362. P. 425-461.

2. Chen B. Y. Some topological obstructions to Bochner-Kaehler metrics and their applications. J. Differential Geom. 1978. V. 13. P. 547-558.

3. Bourguignon J.-P. Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein. Invent. Math. 1981. V. 63. P. 263-286.

4. Derdzinski A. Self-duality of Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimensional four. Compos. Math. 1983. V. 49. P. 405-433.

5. Itoh M. Self-duality of Kähler surfaces. Compos. Math. 1984. V. 51. P. 265-273.

6. Арсеньева О.Е. Автодуальная геометрия келеровых многообразий. Математический сборник. 1993. Т. 184. №8. С. 137-148.

7. Арсеньева О.Е., Кириченко В.Ф. Автодуальная геометрия эрмитовых поверхностей. Математический сборник. 1998. Т. 189. №1. С. 21-44.

8. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. Москва. Мир. 1990. Т. 1, 2.

9. Penrose R. The twistor programme. Math. Phis. Repts. 1977. V. 12. P. 65-76.

10. Blair D.E. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progr. in Math. 2003. Birkhauser Boston, Basil, Berlin. 2003.

11. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93-103.

12. Кириченко В.Ф. О геометрии многообразий Кенмоцу. Доклады Академии Наук. 2001. Т. 380. №5. С. 585-587.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСТЕКАНИЯ НЕФТЯНОГО ПЯТНА

Загриценко Н.Н., Потетюнко Э.Н.
Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

Задачу о растекании нефтяного пятна по водной поверхности будем решать в плоской постановке, нефтяное пятно будем считать симметричным относительно его середины. Начало координат выберем на границе раздела нефть–вода в центре пятна. Ось Ох направим вправо, ось Оу направим вертикально вверх против силы тяжести. С течением времени под действием силы тяжести нефтяное пятно начнет деформироваться: оседать и растекаться.

Форму нефтяного пятна будем описывать функцией *y=h(x,t)*. Будем считать, что нефтяное пятно занимает по горизонтали размеры от *–l(t)* до *l(t)* и граница раздела между нефтяным пятном и подстилающей жидкостью описывается функцией *y = ζ(x,t)*.

Нефтяное пятно и подстилающую жидкость будем моделировать вязкими жидкостями с различными параметрами (плотностями и вязкостями). Обе вязкие жидкости будем описывать линеаризованными уравнениями Навье-Стокса в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial u_{jx}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Pi_j}{\partial \xi} + \frac{1}{\mathrm{Re}_j}\left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_{jx}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_{jx}}{\partial \eta^2}\right]$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial u_{jy}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Pi_j}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \frac{1}{\mathrm{Re}_j}\left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_{jy}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_{jy}}{\partial \eta^2}\right] \quad (1)$$

Безразмерные переменные введены соотношениями:

$x = l_0\xi$ $\quad V_{1x} = \sqrt{gh_*}u_{1x}$ $\quad l = l_0 L$, $l_0 = l_0 L_0$ $\quad p_* = \rho_1 g h_* \Pi_0$

$y = h_*\eta$ $\quad V_{2x} = \sqrt{gh_*}u_{2x}$ $\quad h = h_* H_1$ $\quad P_1 = \rho_1 g h_* \Pi_1$

$t = \dfrac{l_0}{\sqrt{gh_*}}\tau$ $\quad V_{1y} = \varepsilon\sqrt{gh_*}u_{1y}$ $\quad h_0(x) = h_* H_{10}(\xi)$ $\quad P_2 = \rho_2 g h_* \Pi_2$

$\varepsilon = \dfrac{h_*}{l_0}$ $\quad V_{2y} = \varepsilon\sqrt{gh_*}u_{2y}$ $\quad \varsigma = h_* H_2$, $\varsigma_0(x) = h_* H_{20}(\xi)$ $\quad T_* = \rho_1 g h_* T_{1*}$

Здесь $P_1 = -p_1 + p_2\big|_{y=-\infty} - \rho_1 g\, y$, $P_2 = -p_2 + p_2\big|_{y=-\infty} - \rho_2 g\, y$; $\mathrm{Re}_j = \dfrac{h_*^2\sqrt{h_* g}}{l_0 \nu_j}$ (j=1 – нефть, j=2 – вода), $\beta_j = \dfrac{\alpha_j}{l_0^2 \rho_1 g}$ (j=1,2), $\gamma_1 = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$, $\gamma_2 = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$; l_0 – начальная ширина пятна, $y=h_0(x)$ – начальная форма свободной поверхности нефтяного пятна, которую мы считаем известной, $y = \varsigma_0(x)$ – начальная форма границы раздела нефть-вода, которую считаем равной нулю;

$V_{1x}(x,y,t)$, $V_{1y}(x,y,t)$ и $V_{2x}(x,y,t)$, $V_{2y}(x,y,t)$ – проекции на координатные оси векторов скоростей в верхней (нефтяном пятне) и нижней (в воде) жидкостях соответственно; $p_1(x,y,t)$, $p_2(x,y,t)$ – давления в нефти и в воде; ν_1, ν_2 – коэффициенты кинематической вязкости нефти и воды; ρ_1, ρ_2 – плотности нефти и воды соответственно; g – ускорение свободного падения.

Граничные условия (динамические условия для нормальных и касательных напряжений, а также, кинематические условия) задаются следующим образом:

$$\eta = H_1(\xi,\tau): \qquad -\Pi_1 + H_1 + \frac{2\varepsilon^2}{\mathrm{Re}_1}\frac{\partial u_{1y}}{\partial\eta} = -\Pi_0 + \beta_1\frac{\partial^2 H_1}{\partial\xi^2}, \qquad \frac{\partial u_{1y}}{\partial\eta} + \varepsilon^2\frac{\partial u_{1x}}{\partial\xi} = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}_1 T_{1*},$$

$$u_{1y} = \frac{\partial H_1}{\partial\tau}.$$

$$\eta = H_2(\xi,\tau):\ -\Pi_1 + \frac{2\varepsilon^2}{\mathrm{Re}_1}\frac{\partial u_{1y}}{\partial\eta} = -\gamma_1\Pi_2 + H_2(\gamma_1 - 1) + \frac{2\varepsilon^2\gamma_1}{\mathrm{Re}_2}\frac{\partial u_{2y}}{\partial\eta} + \beta_2\frac{\partial^2 H_2}{\partial\xi^2},$$

$$\frac{\partial u_{1y}}{\partial\eta} + \varepsilon^2\frac{\partial u_{1x}}{\partial\xi} = \gamma_2\left[\frac{\partial u_{2y}}{\partial\eta} + \varepsilon^2\frac{\partial u_{2x}}{\partial\xi}\right], \quad u_{2y} = \frac{\partial H_2}{\partial\tau}, \quad u_{1x} = u_{2x}, \quad u_{1y} = u_{2y} \tag{2}$$

Здесь $\mu_1 = \rho_1\nu_1$ – коэффициент динамической вязкости нефти, p_*, – нормальная, а T_* – тангенциальная составляющие внешнего воздействия атмосферы, α_1 – коэффициент поверхностного натяжения между нефтью и воздухом [1].

Начальные условия зададим в виде:

$$\bar{u}_{1,2}(\xi,\eta,0) = 0 \qquad H_1(\xi,0) = H_{10}(\xi) \qquad H_2(\xi,0) = H_{20}(\xi) = 0 \qquad L(0) = L_0 = 1 \tag{3}$$

Далее для нефти вместо уравнения неразрывности воспользуемся уравнением, аналогичным используемому в теории “мелкой воды” [2]:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\tau} - \frac{\partial H_2}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\xi}\int_{H_2}^{H_1} u_{1x}\,d\eta = 0. \tag{4}$$

Решение задачи (1) – (4) строим в виде рядов по степеням ε, считая его малым. Выпишем нулевое приближение.

Нефть: $\frac{\partial u_{1x}}{\partial\tau}=-\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi}+\frac{1}{\mathrm{Re}_1}\frac{\partial^2 u_{1x}}{\partial\eta^2}$, $-\frac{\partial\Pi_1}{\partial\eta}=0$, $\frac{\partial H_1}{\partial\tau}-\frac{\partial H_2}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{H_2}^{H_1}u_{1x}d\eta=0$;

Вода: $\frac{\partial u_{2x}}{\partial\tau}=-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\xi}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\frac{\partial^2 u_{2x}}{\partial\eta^2}$, $-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\eta}=0$, $\frac{\partial u_{2x}}{\partial\xi}+\frac{\partial u_{2y}}{\partial\eta}=0$.

Граничные условия на поверхности раздела нефть-воздух $\eta=H_1(\xi,\tau)$:

$$-\Pi_1+H_1=-\Pi_0+\beta_1\frac{\partial^2 H_1}{\partial\xi^2}\text{, где } \beta_1=\frac{h_0^2\alpha_1}{A^2\rho_1 g};\ \frac{\partial u_{1y}}{\partial\eta}=\mathrm{Re}_1 T_1^*;\quad u_{1y}=\frac{\partial H_1}{\partial\tau}.$$

Граничные условия на поверхности раздела нефть-вода $\eta=H_2(\xi,\tau)$:

$$-\Pi_1=-\gamma_1\Pi_2+H_2(\gamma_1-1)+\beta_2\frac{\partial^2 H_2}{\partial\xi^2}\text{, где } \beta_2=\frac{h_0^2\alpha_2}{A^2\rho_1 g}\text{ и } \gamma_1=\frac{\rho_2}{\rho_1};\qquad \frac{\partial u_{1y}}{\partial\eta}=\gamma_2\frac{\partial u_{2y}}{\partial\eta},\quad\text{где}$$

$\gamma_2=\frac{\mu_2}{\mu_1}$; $u_{2y}=\frac{\partial H_2}{\partial\tau}$, $u_{1x}=u_{2x}$, $u_{1y}=u_{2y}$.

И для нижней жидкости (воды) условия на бесконечности: $\Pi_2\big|_{\eta\to-\infty}=0$, $u_{2x}=0$, $u_{2y}=0$.

Начальные условия нулевые.

Учитывая, что на минус бесконечности поставлены условия затухания и тот факт, что Π_2 от η не зависит, получим что $\Pi_2\equiv 0$. Тогда уравнение для горизонтальной компоненты скорости в нижней жидкости примет вид: $\frac{\partial u_{2x}}{\partial\tau}=\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\frac{\partial^2 u_{2x}}{\partial\eta^2}$. Кроме того, по-прежнему имеет место уравнение неразрывности $\frac{\partial u_{2x}}{\partial\xi}=-\frac{\partial u_{2y}}{\partial\eta}$ и для вертикальной компоненты скорости справедливо такое же уравнение, как и для горизонтальной компоненты: $\frac{\partial u_{2y}}{\partial\tau}=\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\frac{\partial^2 u_{2y}}{\partial\eta^2}$.

Для верхней жидкости (нефти) в нулевом приближении выполняется:

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial\tau}=-\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi}+\frac{1}{\mathrm{Re}_1}\frac{\partial^2 u_{1x}}{\partial\eta^2};\ -\frac{\partial\Pi_1}{\partial\eta}=0\qquad\Rightarrow \Pi_1\text{ от }\eta\text{ не зависит.}$$

Далее проинтегрировав уравнение для горизонтальной компоненты скорости в верхней жидкости поперек нефтяного слоя (т.е. от H_2 до H_1), воспользовавшись вместо уравнения неразрывности выражением (4) и граничными условиями и опустив члены второго (и выше) порядка малости, получим следующее уравнение для нахождения H_1 и H_2:

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial\tau^2}(1-\gamma_1)-\frac{\partial^2 H_1}{\partial\tau^2}=\frac{1}{\mathrm{Re}_1}\frac{\partial T_1^*}{\partial\xi}+\frac{\partial\Pi_*}{\partial\xi}\left(\frac{\partial H_2}{\partial\xi}-\frac{\partial H_1}{\partial\xi}\right)+H_2\frac{\partial^2\Pi_*}{\partial\xi^2}-H_1\frac{\partial^2 H_1}{\partial\xi^2}-H_1\frac{\partial^2\Pi_*}{\partial\xi^2}+\beta_1 H_1\frac{\partial^4 H_1}{\partial\xi^4}$$

В качестве второго уравнения возьмем динамическое условие для нормальных напряжений на границе раздела нефть–вода (с учетом $\Pi_2\equiv 0$ и $-\Pi_1=H_2(\gamma_1-1)+\beta_2\frac{\partial^2 H_2}{\partial\xi^2}$):

$-H_1-\Pi_0-\Pi_*+\beta_1\frac{\partial^2 H_1}{\partial\xi^2}=H_2(\gamma_1-1)+\beta_2\frac{\partial^2 H_2}{\partial\xi^2}$. Таким образом, мы получили систему уравнений для нахождения формы верхней и нижней границ нефтяного пятна. Далее полученная система уравнений решается численными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:
1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959г., 699 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. М., Физматгиз, 1963г., 584 с.

ВЫВОД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА И ПЛЕНКИ, ОБВОЛАКИВАЮЩЕЙ СФЕРУ

Карсян А.Ж., Потетюнко Э.Н.
Ростовский Государственный Университет Путей Сообщения.
Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону, Россия

Изучается влияние пленки, покрывающей сферу, на величину силы воздействия набегающего потока и рассматривается следующая модель: твердая сфера радиуса *a*, покрытая тонкой пленкой толщины *h (h/a<<1)*, которая обтекается стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности заданную скорость *U = const*. Внешняя поверхность пленки деформированная и выписываются граничные условия на поверхности деформированной пленки.

Рассмотрим уравнение движения вязкой жидкости в напряжениях [1]

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} \qquad (1)$$

бесконечности заданную скорость *U = const*. Внешняя поверхность пленки деформированная и выписываются граничные условия на поверхности деформированной пленки.

Рассмотрим уравнение движения вязкой жидкости в напряжениях [1]

$$0 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{rr}^{\ \pm}}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta r}^{\ \pm}}{\partial \theta}\right) \qquad (2)$$

в проекции на тангенциальное направление:

$$0 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{r\theta}^{\ \pm}}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta\theta}^{\ \pm}}{\partial \theta}\right) \qquad (3)$$

В сферической системе координат уравнение несжимаемости имеет вид:

$$\frac{\partial V_r^{\ \pm}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta^{\ \pm}}{\partial \theta} + \frac{2V_r^{\ \pm}}{r} + \frac{V_\theta^{\ \pm} ctg\theta}{r} = 0 \qquad (4)$$

где плюс означает, что мы рассматриваем жидкость как внешнюю среду, а минус означает, что мы рассматриваем среду внутри пленки, покрывающей тело/

Граничные условия имеют вид:

1. на поверхности сферы:

$$V_r^{\ -} = 0;\ V_\theta^{\ -} = 0 \qquad (5)$$

2. на бесконечности:

$$V_r \to UP_1(\cos\theta);\quad V_\theta \to U\,\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}$$
$$p = p_\infty = const \qquad (6)$$

3. на поверхности раздела пленка - набегающий поток выполняется кинематическое условие:

$$V_r \Big|_{a+h+\varsigma(\theta,t)} = \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \varsigma(\theta,t)}{\partial \theta} \qquad (7)$$

Для постановки граничных условий на границе раздела пленка – набегающий поток, следуя [1] дадим обобщенную формулировку, соответствующую системе уравнений (2-4). Используя принцип виртуальной работы [1] умножим уравнение (2) для внешней среды на вариацию компоненты скорости δV_r^{+}, уравнение (2) для внутренней среды на вариацию компоненты скорости δV_r^{-}, уравнение (3) для внешней среды на вариацию компоненты скорости δV_Θ^{+}, уравнение (3) для внешней среды на вариацию компоненты скорости δV_Θ^{-}, уравнение неразрывности для внешней среды (4) на δp_{rr}^{+}, уравнение неразрывности для внутренней среды (4) на δp_{rr}^{-}, кинематическое условие на поверхности раздела пленка – набегающий поток (7) на δp_{nn}, где δp_{nn} - это вариация напряжения, нормального к поверхности раздела. Проинтегрируем полученные уравнения по области $\Omega = R + Q$ (*R* - внутренняя среда (пленка), *Q* - внешняя среда (набегающий поток)). Используем формулу Гаусса – Остроградкого.

Сложим полученные интегральные равенства, проинтегрируем по частям слагаемые, содержащие пространственные производные. Учитывая, что внешняя нормаль к внутренней среде является внутренней нормалью к внешней среде, получим обобщенную формулировку, соответствующую (2-4).