Актуальные вопросы науки и образования
Физико-математические науки

О КОНТАКТНО КОНФОРМНО ПОЛУПЛОСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ КЕНМОЦУ

Аристархова А.В.
Московский Педагогический Государственный Университет,
Москва, Россия

Конформно полуплоские, то есть автодуальные и антиавтодуальные, 4-мерные многообразия (например, [1]-[7]) играют достаточно значимую роль в современной науке в силу связи их геометрии с геометрией эйнштейновых многообразий [8] и с твисторной геометрией [9]. В настоящей работе построен 5-мерный контактный аналог автодуальной геометрии. А именно, введено понятие конформно полуплоских (контактно-автодуальных или контактно-антиавтодуальных) 5-мерных почти контактных метрических многообразий и рассмотрена контактно-автодуальная геометрия 5-мерных многообразий Кенмоцу.

Рассмотрим модуль $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей и алгебру $C^\infty(M)$ гладких функций на гладком 5-мерном многообразии M.

Напомним [10], что *почти контактной метрической структурой* (короче, *АС- структурой*) на M называется четверка $(\Phi,\xi,\eta,g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ тензорных полей на M, где Φ − эндоморфизм $C^\infty(M)$ -модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, ξ и η − векторное и ковекторное поля, называемые *характеристическим вектором* и *контактной формой* соответственно, g - билинейная симметричная положительно определенная форма на $\mathfrak{X}(M)$, называемая *римановой структурой*. При этом

1) $\eta(\xi)=1$; 2) $\Phi(\xi)=0$; 3) $\eta\circ\Phi=0$;

4) $\Phi^2=-id+\eta\otimes\xi$;

5) $\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y)$

для любых $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

Многообразие, на котором фиксирована *АС* - структура, называется *почти контактным метрическим многообразием* (короче, *АС - многообразием*).

В 1971 году Кенмоцу [11] ввел в рассмотрение новый класс *АС* -структур, характеризуемых для любых гладких векторных полей X и Y тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y=\langle\Phi X,Y\rangle\xi-\eta(Y)\Phi X,$$

где ∇ − риманова связность метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$. Такие *АС* - структуры называются *структурами Кенмоцу*. Многообразие, на котором фиксирована структура Кенмоцу, называется *многообразием Кенмоцу*.

Пусть $(M,\ \eta,\ \xi,\ \Phi,\ g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ - 5-мерное ориентированное *АС* -многообразие. В этом случае классический тензор C Вейля можно рассматривать как эндоморфизм модуля $\Lambda_2(M)$, который внутренним образом определяет эндоморфизм $\mathcal{C}$ модуля $\Lambda_2(L)$, задаваемый одной из трех эквивалентных формул:

$$\mathcal{C}=i^*\circ C\circ \mathrm{I}^*$$

$$\mathcal{C}(\omega)=C(\mathrm{I}^*\omega)\big|_{\mathrm{L}}$$

$$\mathcal{C}(\omega)_{\alpha\beta}=C_{\alpha\beta kl}(\mathrm{I}^*\omega)^{kl}$$

где i − вложение на $\mathrm{L}\subset\mathfrak{X}(M)$, $\mathrm{I}=-\Phi^2$ − естественный проектор на 4-мерное контактное распределение L, 2-форма $\mathrm{I}^*(\omega)\in\Lambda_2(M)$ − антиувлечение 2-формы $\omega\in\Lambda_2(\mathrm{L})$ при отображении I, а $C(\mathrm{I}^*\omega)|_{\mathrm{L}}$ − сужение 2-формы $C(\mathrm{I}^*\omega)\in\Lambda_2(M)$ на L. Кроме того, $\Lambda_2(\mathrm{L})=\Lambda^+(\mathrm{L})\oplus\Lambda^-(\mathrm{L})$, где $\Lambda^+(\mathrm{L})$, $\Lambda^-(\mathrm{L})$ − собственные подмодули эндоморфизма $*;\Lambda_2(\mathrm{L})\to\Lambda_2(\mathrm{L})$, соответствующие собственным значениям 1 и –1. Заметим, что индексы $k,\ l$ пробегают значения $0,1,2,1^€,2^€$, а индексы $\alpha,\ \beta$ − значения $1,2,1^€,2^€$, где $a^€=a+2$.

Таким образом, 5-мерное *АС* -многообразие будем называть *контактно-автодуальным* (короче, *С-автодуальным*) *многообразием*, если $\mathcal{C}(\omega)=0$ для любых 2-форм $\omega\in\Lambda^+(\mathrm{L})$. Аналогично, 5-мерное *АС* -многообразие будем называть *контактно-антиавтодуальным* (короче, *С-антиавтодуальным*) *многообразием*, если $\mathcal{C}(\omega)=0$ для любых 2-форм $\omega\in\Lambda^+(\mathrm{L})$. При этом, 5-мерное *АС* -многообразие называется *контактно конформно полуплоским* (короче, *С-конформно полуплоским*), если оно является контактно-автодуальным или контактно-антиавтодуальным.

С учетом введенного определения был установлен критерий контактной автодуальности 5-мерных многообразий Кенмоцу и доказано необходимое условие их контактной антиавтодуальности. А именно:

Теорема 1. 5-мерное многообразие Кенмоцу является контактно-автодуальным многообразием тогда и только тогда, когда

$$A^{ac}_{bd}=-\frac{20+\kappa}{12}\tilde{\delta}^{ac}_{bd}$$

где $\tilde{\delta}^{ac}_{bd} = \delta^a_b \delta^c_d + \delta^a_d \delta^c_b$

Теорема 2. Если 5-мерное многообразие Кенмоцу является контактно-антиавтодуальным многообразием, то его скалярная кривизна к = -20.

В силу справедливости теоремы 1, была доказана следующая теорема:

Теорема 3. 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-автодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной Ф- голоморфной секционной кривизны с.

Учитывая указанные результаты и результаты [12], получаем:

Теорема 4. 5-мерное многообразие Кенмоцу *M* является контактно-автодуальным многообразием тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий, снабженному канонической косимплектической структурой:

1) $\mathrm{C}^2 \times \mathrm{R}$; 2) $\mathrm{C}P^2 \times \mathrm{R}$; 3) $\mathrm{C}H^2 \times \mathrm{R}$,

где C^2, $\mathrm{C}P^2$, $\mathrm{C}H^2$ − комплексное евклидово, комплексное проективное и комплексное гиперболическое двумерные пространства, соответственно.

В силу справедливости теоремы 2, была доказана следующая теорема:

Теорема 5. 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-антиавтодуально тогда и только тогда, когда оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой ξ = -4.

Таким образом, полученные результаты вскрыли интересные связи между такими характеристиками многообразий Кенмоцу, как контактная автодуальность и постоянство голоморфной секционной кривизны, как контактная антиавтодуальность и эйнштейновость, и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1978. V. 362. P. 425-461.

2. Chen B. Y. Some topological obstructions to Bochner-Kaehler metrics and their applications. J. Differential Geom. 1978. V. 13. P. 547-558.

3. Bourguignon J.-P. Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein. Invent. Math. 1981. V. 63. P. 263-286.

4. Derdzinski A. Self-duality of Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimensional four. Compos. Math. 1983. V. 49. P. 405-433.

5. Itoh M. Self-duality of Kähler surfaces. Compos. Math. 1984. V. 51. P. 265-273.

6. Арсеньева О.Е. Автодуальная геометрия келеровых многообразий. Математический сборник. 1993. Т. 184. №8. С. 137-148.

7. Арсеньева О.Е., Кириченко В.Ф. Автодуальная геометрия эрмитовых поверхностей. Математический сборник. 1998. Т. 189. №1. С. 21-44.

8. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. Москва. Мир. 1990. Т. 1, 2.

9. Penrose R. The twistor programme. Math. Phis. Repts. 1977. V. 12. P. 65-76.

10. Blair D.E. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progr. in Math. 2003. Birkhauser Boston, Basil, Berlin. 2003.

11. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93-103.

12. Кириченко В.Ф. О геометрии многообразий Кенмоцу. Доклады Академии Наук. 2001. Т. 380. №5. С. 585-587.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСТЕКАНИЯ НЕФТЯНОГО ПЯТНА

Загриценко Н.Н., Потетюнко Э.Н.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Задачу о растекании нефтяного пятна по водной поверхности будем решать в плоской постановке, нефтяное пятно будем считать симметричным относительно его середины. Начало координат выберем на границе раздела нефть–вода в центре пятна. Ось Ох направим вправо, ось Оу направим вертикально вверх против силы тяжести. С течением времени под действием силы тяжести нефтяное пятно начнет деформироваться: оседать и растекаться.

Форму нефтяного пятна будем описывать функцией $y=h(x,t)$. Будем считать, что нефтяное пятно занимает по горизонтали размеры от $-l(t)$ до $l(t)$ и граница раздела между нефтяным пятном и подстилающей жидкостью описывается функцией $y = \zeta(x,t)$.

Нефтяное пятно и подстилающую жидкость будем моделировать вязкими жидкостями с различными параметрами (плотностями и вязкостями). Обе вязкие жидкости будем описывать линеаризованными уравнениями Навье-Стокса в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial u_{jx}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Pi_j}{\partial \xi} + \frac{1}{\mathrm{Re}_j}\left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_{jx}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_{jx}}{\partial \eta^2}\right]$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial u_{jy}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Pi_j}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \frac{1}{\mathrm{Re}_j}\left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_{jy}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_{jy}}{\partial \eta^2}\right] \quad (1)$$