ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА ПЛИС

Мо Чжо Чо
Кафедра электроники и информатики, Московский авиационный технический институт

Для вычисления численного значения функции $exp(x)$ часто используют ее разложение в бесконечный ряд вида:

$$exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Анализируя это выражение можно вывести общую зависимость числа выполняемых при вычислении элементарных математических операций от количества членов аппроксимирующего ряда. Для n≥1 получим:

$$N_{SUM}=n,$$

$$N_{MULT}=2\cdot(n-1)$$

Данные выражения, могут быть использованы как для оценки необходимых для реализации аппаратных ресурсов ПЛИС, так и при известности времени выполнения элементарных математических операций и условии, что все операции выполняются строго последовательно, для определения суммарного времени вычисления значения функции.

$$t_\Sigma=t_{SUM}\cdot N_{SUM}+t_{MULT}\cdot N_{MULT}$$

Расчеты показывают, что при $|x|\le 1$ например, для получения относительной ошибки вычисления $Er=1\cdot 10^{-3}\%$ необходимо использовать 7 членов ряда $(Er=1.025\cdot 10^{-3}\%)$. При реализации на ПЛИС это потребует использования 7 сумматоров и 12 умножителей.

Из математики известно, что для получения многочлена, наименее отклоняющегося от заданной функции необходимо использовать его разложение по многочленам Чебышева. Для исследуемой функции это разложение имеет вид:

$$exp(a\cdot x)=I_0(a)+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}I_n(a)\cdot T_n(x),$$

где: $I_0(a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2\cdot k}}{(k!)^2}$ и $I_n(a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2\cdot k+n}}{(n+k)!\cdot k!}$ - функции Бесселя мнимого аргумента порядка n; $T_n(x)$ - многочлены Чебышева от аргумента функции.

Как следует из приведенных выражений, величины $I_0(a)$ и $I_n(a)$ при известном значении a являются константами и могут быть вычислены заблаговременно.

Ниже в таблице 1 приведено соотношение между числом членов суммы разложения по многочленам Чебышева, относительной погрешностью вычисления и числом выполняемых операций.

Таблица 1

Число членов ряда	1	2	3	4	5
Относительная погрешность	2.83 %	0.54 %	0.0256 %	4.47e-3 %	2.52e-4 %
Количество операций	$N_{SUM}=1$ $N_{MULT}=1$	$N_{SUM}=3$ $N_{MULT}=3$	$N_{SUM}=5$ $N_{MULT}=6$	$N_{SUM}=8$ $N_{MULT}=8$	$N_{SUM}=11$ $N_{MULT}=12$

В этом случае при $|x| \le 1$ для получения относительной ошибки вычисления $Er = 1 \cdot 10^{-3}\%$ необходимо использовать 5 членов ряда $(Er = 4.54 \cdot 10^{-4}\%)$. Однако число выполняемых при этом операций увеличивается.

Известны методы повышения точности вычисления функции, основанные на масштабировании ее аргументы. Проведем в исходном разложении замену:

$$x = \frac{x}{2} \cdot 2 = 2 \cdot \left(\frac{4 \cdot x - 1}{8} + \frac{1}{8} \right) = 2 \cdot \left(\frac{y}{8} + \frac{1}{8} \right).$$

В этом случае расчетное выражение для функции примет вид:

$$exp(x) = exp(0.25) \cdot \left[I_0(0.125) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} I_k(0.125) \cdot T_k(4 \cdot x - 1) \right]^2$$

Теперь для получения относительной ошибки вычисления в том же диапазоне изменения аргумента на уровне $Er = 1 \cdot 10^{-3}\%$ достаточно использование только двух членов ряда $(Er = 2.8 \cdot 10^{-4}\%)$ и вычисление функции потребует выполнения 6 операций сложения и 5 операций умножения.

Последний алгоритм был положен в основу разработки вычислителя функции $exp(x)$ с использованием ПЛИС фирмы Altera.

В таблице 2 приведены результаты исследования модели разработанного устройства

Таблица 2.

Значение аргумента	0.109375	0.3046875	0.5	0.625	0.90625
Относительная ошибка	1.452664e-4	1.472459e-4	4.115197e-4	6.841889e-3	0.075145

При вычислении функций Бесселя учитывалось, как минимум, 7 правильных десятичных знаков после запятой, что соответствует 24 разрядам дробной части двоичного числа $\left(2^{-24} = 5.9 \cdot 10^{-8}\right)$. Разрядность аргумента функции – 8 бит дробной части. $\left(2^{-8} = 3.9 \cdot 10^{-3}\right)$

На основании изложенного можно сделать вывод, что применение при вычислении функции $exp(x)$ разложения по многочленам Чебышева позволяет, как уменьшить необходимые для реализации аппаратные ресурсы ПЛИС, так и уменьшить суммарное время ее вычисления.

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ НА ПЛИС

Мо Чжо Чо

Кафедра электроники и информатики, Московский авиационный технический институт

Система проектирования Quartus II, используемая для разработки устройств на основе ПЛИС фирмы Altera, включает библиотеку стандартных подпрограмм, предназначенных для выполнения основных математических операций. В частности, для реализации операции умножения используют подпрограмму lpm_mult. Эта подпрограмма позволяет синтезировать схему устройства, реализующего на аппаратном уровне умножитель двух двоичных чисел заданной разрядности. Очевидно, что чем больше разрядность сомножителей, тем сложнее устройство и при его реализации расходуются большие аппаратные ресурсы ПЛИС и возрастает время вычисления. Поэтому проблема сокращения аппаратных затрат и времени вычисления является весьма важной.

Согласно выдвинутой А. Н. Колмогоровым гипотезе $\mathbf{n^2}$ [1] сложность операции умножения, то есть количество простых операций выполняемых для получения произведения, пропорциональна квадрату разрядности сомножителей. Следовательно и аппаратные затраты на реализации умножителя должны расти пропорционально квадрату разрядности сомножителей. Желание упростить реализацию умножителей привело к разработке методов быстрого умножения, для которых сложность реализации пропорциональна $\mathbf{n^{\log_2 3}}$. [2].