имитации отжига на основе стохастической сети Хопфилда показали, что комбинированный алгоритм находит наилучшие решения среди рассматриваемых алгоритмов.

Использование в комбинированном алгоритме нейронных сетей позволяет легко распараллелить вычислительный процесс, что приведет к существенному увеличению скорости получения решения при использовании компьютеров с многоядерными процессорами или при решении данной задачи на кластерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Уоссермен Ф., «Нейрокомпьютерная техника» – М.: Мир, 1992. – 240 с.

2. Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P. Optimization by simulated annealing / Science. Vol. 220, Number 4598, May 13, 1983, p. 671-680.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ В МУЛЬТИПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДОМ ФЛЕТЧЕРА-РИВСА

Кайнов А.С.

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Казань, Россия

Рассматривается задача оптимального распределения n заданий по ℓ компьютерам мультипроцессорной системы [1]. Необходимо определить план распределения заданий $X=\left(x_{iz}\right)_{1\times\ell\cdot n}$, обеспечивающий минимум целевой функции:

$$F(X)=\lambda_1\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\left(\sum_{z=1}^{n}\tau_{iz}x_{iz}-\sum_{z=1}^{n}\tau_{jz}x_{jz}\right)^2+\lambda_2\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n}\tau_{iz}x_{iz}\Rightarrow\min \qquad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$g_z(X)=\sum_{i=1}^{\ell}x_{iz}-1=0 \quad (z=\overline{1,n}), \qquad (2)$$

$$g_{iz}(X)=x_{iz}(1-x_{iz})=0 \quad \left(i=\overline{1,\ell};\ z=\overline{1,n}\right). \qquad (3)$$

Элементы x_{iz} плана распределения X являются непрерывными величинами и имеют следующий смысл: если $x_{iz}=1$, то z-е задание выполняется на i-м компьютере, если $x_{iz}=0$, то z-е задание на i-м компьютере не выполняется. Величина τ_{iz} – это время выполнения z-го задания на i-м компьютере, λ_1, λ_2 – коэффициенты целевой функции. Целевая функция (1) является сверткой двух критериев: загруженность компьютеров должна быть равномерной, суммарное время работы компьютеров должно быть минимальным.

Ограничение (2) требует, чтобы каждое задание выполнялось только на одном компьютере. Ограничение (3) требует, чтобы на i-м компьютере задание z либо выполнялось целиком, либо вовсе не выполнялось.

Задача (1)-(3) является непрерывной с ограничениями типа равенств и относится к классу задач нелинейного программирования. Для решения исходной задачи она формулируется как задача безусловной оптимизации, и в результате математическая модель распределения заданий в мультипроцессорной системе выглядит следующим образом:

$$F(X)=\lambda_1\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\left(\sum_{z=1}^{n}\tau_{iz}x_{iz}-\sum_{z=1}^{n}\tau_{jz}x_{jz}\right)^2+\lambda_2\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{z=1}^{n}\tau_{iz}x_{iz}+A_1\sum_{z=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\ell}x_{iz}-1\right)^2+$$
$$+A_2\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{z=1}^{n}x_{iz}^2(1-x_{iz})^2\Rightarrow\min \qquad (4)$$

Решение $X=\left(x_{iz}\right)_{1\times\ell\cdot n}$ имеет смысл только тогда, когда элементы вектора X принимают значения 0 или 1, поэтому решение округляется в соответствии со следующим правилом:

$$x_{iz} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_{iz} \geq 0.5 \\ 0, \text{ если } x_{iz} < 0.5 \end{cases}. \qquad (5)$$

Для решения задачи (4) применяется метод Флетчера-Ривса [2], который относится к классу градиентных методов поиска приближенного решения. Метод Флетчера-Ривса состоит в построении последовательности точек $\{X^k\}$, где $X^k = \left(x_{iz}^k\right)_{1\times\ell\cdot n}$, $k = 0,1,\ldots$, обеспечивающей убывание целевой функции (т.е. $F\left(X^{k+1}\right) < F\left(X^k\right)$), где точки последовательности вычисляются по правилу:

$$X^{k+1} = X^k + t_k D^k, \; k = 0,1,\ldots, \qquad (6)$$

а величина шага t_k определяется для каждого значения k из условия:

$$F\left(X^k + t_k D^k\right) \to \min_{t_k}. \qquad (7)$$

Решение задачи (7) сводится к нахождению корней полинома третьей степени. Направление убывания $D^k = \left(d_{iz}^k\right)_{1\times\ell\cdot n}$ определяется по формуле:

$$D^k = \begin{cases} -\nabla F\left(X^0\right), \text{ если } k = 0 \\ -\nabla F\left(X^k\right) + \beta_{k-1} D^{k-1}, \text{ если } k > 0 \end{cases}, \qquad (8)$$

где вектор-градиент $\nabla F\left(X^k\right)$ целевой функции и коэффициент β_{k-1} определяются как:

$$\nabla F\left(X^k\right) = \left(\frac{\partial F\left(X^k\right)}{\partial x_{iz}}\right)_{1\cdot\ell\cdot n} \text{ и } \beta_{k-1} = \frac{\left\|\nabla F\left(X^k\right)\right\|^2}{\left\|\nabla F\left(X^{k-1}\right)\right\|^2}.$$

Евклидова норма $\left\|\nabla F(X)\right\|$ вычисляется по формуле:

$$\left\|\nabla F(X)\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{z=1}^{n}\left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_{iz}}\right)^2} \qquad (9)$$

Алгоритм Флетчера-Ривса состоит из следующих этапов:

Входные параметры алгоритма: начальное состояние $X^0 = \left(x_{iz}^0\right)_{1\times\ell\cdot n}$, параметры критериев останова $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, предельное число итераций M.

1. Установить счетчик итераций: $k = 0$.

2. Вычислить градиент $\nabla F\left(X^k\right) = \left(\frac{\partial F\left(X^k\right)}{\partial x_{iz}}\right)_{1\times\ell\cdot n}$, используя следующую формулу:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_{iz}} = 2\lambda_1 \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{q=1}^{n}(\ell\delta_{ij} - 1)\tau_{iz}\tau_{jq}x_{jq} + \lambda_2\tau_{iz} + 2A_1\left(\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{q=1}^{n}\delta_{zq}x_{jq} - 1\right) +$$
$$+ 2A_2\left(x_{iz} - 3x_{iz}^2 + 2x_{iz}^3\right) \; \left(i = \overline{1,\ell};\, z = \overline{1,n}\right).$$

3. Проверить выполнение условия окончания $\left\|\nabla F\left(X^k\right)\right\| < \varepsilon_1$. Если условие выполнено, то принять $X^* = X^k$ и перейти на п.9.

4. Если выполняется условие $k \geq M$, то $X^* = X^k$ и перейти на п.9.

5. Определить направление убывания $D^k = \left(d_{iz}^k\right)_{1\times\ell\cdot n}$ по формуле (8).

6. Найти $t_k^* : F\left(X^k + t_k^* D^k\right) = \min\limits_{t_k} F\left(X^k + t_k D^k\right)$. Если t_k^* не найден, то принять $t_k^* = 0$.

7. Вычислить новую точку $X^{k+1} = X^k + t_k^* D^k$.

8. Если одновременно выполняются условия $\left\|X^k - X^{k-1}\right\| < \varepsilon_2$, $\left\|X^{k+1} - X^k\right\| < \varepsilon_2$, $\left|F\left(X^k\right) - F\left(X^{k-1}\right)\right| < \varepsilon_2$, $\left|F\left(X^{k+1}\right) - F\left(X^k\right)\right| < \varepsilon_2$, то принять $X^* = X^{k+1}$ и перейти на п.9. Иначе установить $k = k+1$ и перейти на п.2.

9. Округлить координаты точки $X^* = \left(x_{iz}^*\right)_{1\times\ell\cdot n}$ в соответствии с правилом (5).

10. Если план X^* удовлетворяет ограничениям (2) и (3), то X^* – найденное решение, в противном случае – решения не найдено.

11. Выход.

В работе исследовано влияние параметров алгоритма на получаемые решения и скорость работы алгоритма. Предложен способ выбора начальных точек $X^0 = \left(x_{iz}^0\right)_{1\times\ell\cdot n}$ из окрестности центра единичного куба, т.е. $x_{iz}^0 = [0.5 - \Delta x; 0.5 + \Delta x]$. Численные эксперименты показали, что наилучшие значения Δx находятся в интервале от 0.05 до 0.2. Однако, при слишком малом Δx может возникнуть ситуация когда все точки из окрестности $(0.5 - \Delta x; 0.5 + \Delta x;)$ будут находиться в области притяжения локальных минимумов, далеких от оптимального решения, что ограничит потенциальную возможность алгоритма найти глобальный минимум. Поэтому рекомендуется выбирать параметр Δx из диапазона $[0.15; 0.2]$.

В работе исследованы критерии останова и выявлены их недостатки, приводящие к избыточному числу итераций алгоритма. Предложен модифицированный критерий останова, использующий относительные приращения целевой функции, позволяющий сократить число итераций без потери качества получаемых решений.

Результаты численных экспериментов показали эффективность метода Флетчера-Ривса для решения задачи распределения заданий в мультипроцессорной системе, и были даны рекомендации по выбору параметров алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Дегтярев Ю.И. Исследование операций: Учеб. для вузов по спец. АСУ. – М.: Высш. шк., 1986. – 320 с.: ил.

2. Летова Т.А., Пантелеев А.В. Экстремум функций в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1998.-376 с.: ил.