***Фундаментальные и прикладные проблемы математики***

## НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Кайнов А.С.
*Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева*
*Казань, Россия*

В настоящее время активно разрабатываются и внедряются распределенные информационные системы автоматизации деятельности специалистов различных предприятий и структур. В таких системах возникает необходимость решения множества аналитических задач, и от того, насколько система справится с ними, зависит быстродействие всей системы, а также оперативность принятия управленческих и финансовых решений. В связи с этим актуальной является задача распределения заданий в мультипроцессорной системе.

Математическая постановка задача выглядит следующим образом.

Пусть $X = \left(x_{iz}\right)_{\ell \times n}$ – план распределения заданий, где $\ell$ – число компьютеров в мультипроцессорной системе, $n$ – число заданий,

$$x_{iz} = \begin{cases} 1, \text{ если } z - \text{я задача выполняется на } i - \text{м компьютере} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \quad \left(i = \overline{1,\ell};\ z = \overline{1,n}\right)$$

Необходимо найти план распределения заданий, обеспечивающий минимум целевой функции:

$$F(X) = \lambda_1 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \left( \sum_{z=1}^{n} \tau_{iz} x_{iz} - \sum_{z=1}^{n} \tau_{jz} x_{jz} \right)^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{z=1}^{n} \tau_{iz} x_{iz} + \lambda_3 \sum_{z=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{\ell} x_{iz} - 1 \right)^2 \Rightarrow \min, \quad (1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – весовые коэффициенты целевых и штрафной функций.

$NP$-полнота задачи (1) обуславливает применение приближенных методов поиска решения, среди которых хорошо зарекомендовали себя методы решения на основе нейронных сетей [1]. Нейросетевые методы характеризуются высокой скоростью получения результата и возможностью распараллеливания вычислительного процесса, но они являются методами поиска локального минимума, поэтому для нахождения глобального решения алгоритм решения необходимо запускать многократно из различных начальных состояний и выбирать наилучшее по качеству решение. В качестве начальных состояний нейронной сети предлагается использовать промежуточные результаты метода имитации отжига, который зарекомендовал себя как эффективный метод поиска глобального решения [1, 2]. Суть предлагаемого комбинированного метода состоит в следующем: реализуется алгоритм имитации отжига на основе стохастической асинхронной дискретной сети Хопфилда (САДСХ), но, в дополнение к нему, из промежуточных состояний запускается детерминированная асинхронная дискретная сеть Хопфилда (АДСХ), которая обеспечивает быстрое нахождение локального минимума целевой функции. Из найденных АДСХ решений выбирается наилучшее. Работу комбинированного алгоритма иллюстрирует рис. 1.

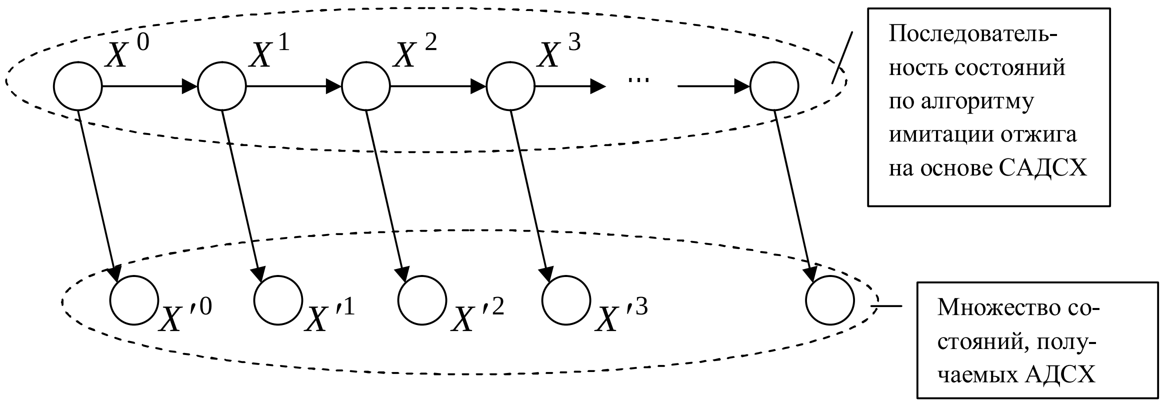


**Рис. 1.** Комбинированный алгоритм

Комбинированный алгоритм состоит из следующих этапов:
Входные параметры алгоритма:

- начальное состояние $X^0 = \left(x_{iz}^0\right)_{\ell \times n}$,
- начальная температура $T_{\max}$,
- коэффициент охлаждения $\alpha \in (0,1)$,
- число итераций $m$.

1. Задать начальное состояние сети $X = X^0$, начальную температуру $T = T_{\max}$, значение целевой функции $F_{\min} = \infty$.

2. Задать признаки улучшения значения целевой функции $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 1$.

3. Задать номер нейрона: $i = 1$, $z = 1$.

4. Если $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 > 0$, то:

4.1. Задать признак $d = 0$.

4.2. Установить счетчик итераций $k = 1$.

4.3. Вычислить вероятность $p_{iz}$ нахождения нейрона $(i, z)$ в состоянии 1 по формуле $p_{iz} = \dfrac{1}{1 + e^{-h_{iz}/T}}$, где $h_{iz} = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{q=1}^{n} \omega_{jq\,iz} x_{jq} - \vartheta_{iz}$ – взвешенная сумма входов нейрона, $\omega_{jq\,iz} = \left[\lambda_1(-2)(\ell\delta_{ij} - 1)\tau_{iz}\tau_{jq} + \lambda_3(-2)\delta_{zq}\right](1 - \delta_{ij}\delta_{zq})$ – синаптический вес связи между нейронами, $\vartheta_{iz} = \lambda_1(\ell - 1)\tau_{iz}^2 + \lambda_2\tau_{iz} - \lambda_3$ – порог активизации нейрона.

4.4. В соответствии с равномерным законом распределения случайных величин сгенерировать число $R$ из диапазона $(0,1)$.

4.5. Если $R < p_{iz}$, то принять $x_{iz} = 1$, иначе $x_{iz} = 0$.

4.6. Запустить АДСХ из начального состояния $X = \left(x_{iz}\right)_{\ell \times n}$, в результате чего сеть сходится к локальному минимуму $X' = \left(x'_{iz}\right)_{\ell \times n}$.

4.7. Если состояние $X' = \left(x'_{iz}\right)_{\ell \times n}$ является допустимым планом распределения заданий и $F_{\min} > F(X')$, где $F(X')$ вычисляется по формуле (1), то присвоить $F_{\min} = F(X')$, $X_{\min} = X'$ и установить признак уменьшения целевой функции $d = 1$.

4.8. Если $z < n$, то установить $z = z + 1$ и перейти на пункт 4.10.

4.9. Если $z = n$, то:

4.9.1. Если $i < \ell$, то установить $i = i + 1$, $z = 1$ и перейти на пункт 4.10.

4.9.2. Если $i = \ell$, то установить $i = 1$, $z = 1$ и перейти на пункт 4.10.

4.10. Если $k < m$, то $k = k + 1$ и перейти на пункт 4.3.

4.11. Переустановить признаки уменьшения целевой функции $d_1 = d_2$, $d_2 = d_3$, $d_3 = d_4$, $d_4 = d_5$, $d_5 = d$.

4.12. Вычислить новую температуру $T = \alpha \cdot T$ и перейти на пункт 4.

5. Если $F_{\min} \neq \infty$, то $X_{\min} = \left(x_{iz}\right)_{\ell \times n}$ – полученное решение, иначе – решения не найдено.

6. Выход.

Трудоемкость разработанного алгоритма оценивается как $O\left(m \cdot \log_a \dfrac{T_{\min}}{T_{\max}} \cdot (\ell \times n)^2\right)$, где $\alpha$ – коэффициент охлаждения, $m$ – количество итераций при постоянной температуре, $T_{\max}$ – начальная температура отжига, $T_{\min}$ – конечная температура, при которой отжиг прекращается.

Экспериментальные исследования комбинированного алгоритма, алгоритма решения на основе дискретной сети Хопфилда и алгоритма имитации отжига на основе стохастической сети Хопфилда показали, что комбинированный алгоритм находит наилучшие решения среди рассматриваемых алгоритмов.

Использование в комбинированном алгоритме нейронных сетей позволяет легко распараллелить вычислительный процесс, что приведет к существенному увеличению скорости получения решения при использовании компьютеров с многоядерными процессорами или при решении данной задачи на кластерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Уоссермен Ф., «Нейрокомпьютерная техника» – М.: Мир, 1992. – 240 с.

2. Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P. Optimization by simulated annealing / Science. Vol. 220, Number 4598, May 13, 1983, p. 671-680.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ В МУЛЬТИПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДОМ ФЛЕТЧЕРА-РИВСА

Кайнов А.С.
*Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева*
*Казань, Россия*

Рассматривается задача оптимального распределения $n$ заданий по $\ell$ компьютерам мультипроцессорной системы [1]. Необходимо определить план распределения заданий $X = \left(x_{iz}\right)_{1\times \ell\cdot n}$, обеспечивающий минимум целевой функции:

$$F(X) = \lambda_1 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \left( \sum_{z=1}^{n} \tau_{iz} x_{iz} - \sum_{z=1}^{n} \tau_{jz} x_{jz} \right)^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n} \tau_{iz} x_{iz} \Rightarrow \min \qquad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$g_z(X) = \sum_{i=1}^{\ell} x_{iz} - 1 = 0 \quad (z = \overline{1,n}), \qquad (2)$$

$$g_{iz}(X) = x_{iz}(1 - x_{iz}) = 0 \quad \left( i = \overline{1,\ell};\, z = \overline{1,n} \right). \qquad (3)$$

Элементы $x_{iz}$ плана распределения $X$ являются непрерывными величинами и имеют следующий смысл: если $x_{iz} = 1$, то $z$ -е задание выполняется на $i$ -м компьютере, если $x_{iz} = 0$, то $z$ -е задание на $i$ -м компьютере не выполняется. Величина $\tau_{iz}$ – это время выполнения $z$ -го задания на $i$ -м компьютере, $\lambda_1$, $\lambda_2$ – коэффициенты целевой функции. Целевая функция (1) является сверткой двух критериев: загруженность компьютеров должна быть равномерной, суммарное время работы компьютеров должно быть минимальным.

Ограничение (2) требует, чтобы каждое задание выполнялось только на одном компьютере. Ограничение (3) требует, чтобы на $i$ -м компьютере задание $z$ либо выполнялось целиком, либо вовсе не выполнялось.

Задача (1)-(3) является непрерывной с ограничениями типа равенств и относится к классу задач нелинейного программирования. Для решения исходной задачи она формулируется как задача безусловной оптимизации, и в результате математическая модель распределения заданий в мультипроцессорной системе выглядит следующим образом:

$$F(X) = \lambda_1 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \left( \sum_{z=1}^{n} \tau_{iz} x_{iz} - \sum_{z=1}^{n} \tau_{jz} x_{jz} \right)^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{z=1}^{n} \tau_{iz} x_{iz} + A_1 \sum_{z=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{\ell} x_{iz} - 1 \right)^2 +$$

$$+ A_2 \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{z=1}^{n} x_{iz}^2 (1 - x_{iz})^2 \Rightarrow \min \qquad (4)$$

Решение $X = \left(x_{iz}\right)_{1\times \ell\cdot n}$ имеет смысл только тогда, когда элементы вектора $X$ принимают значения 0 или 1, поэтому решение округляется в соответствии со следующим правилом: