

и некоторые их приложения. Минск: наука и техника, 1987.

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СРЕД С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

Мейланов Р.П., Шабанова М.Р.

*Институт проблем геотермии ДагНЦ РАН
Махачкала, Россия*

Особенности физических свойств систем с фрактальной структурой связаны с проявлением эффектов памяти, пространственных корреляций

и процессами самоорганизации. Создание адекватных количественных моделей для исследования свойств систем с фрактальной структурой требует привлечения математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка [1-2]. С этим и связан повышенный интерес к приложению математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка к задачам теплопереноса [3-5]. В настоящем сообщении приводится решение обобщенного уравнения теплопроводности с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} - D \frac{\partial^\beta T(\xi, \tau)}{\partial \xi^\beta} - \frac{T(\xi, 0)}{\Gamma(1-\alpha) \cdot \tau^\alpha} = 0 \quad (1)$$

где $0 < \alpha \leq 1, 1 < \xi \leq 2$, $\tau > 0, |\xi| < \infty$,
 $\tau = t/t_0, \xi = x/x_0$ безразмерные время и координата, t_0, x_0 - характерные время и масштаб,

$D = \chi \frac{t_0}{x_0^2}$, χ - коэффициент температуропроводности, $T(\xi, 0)$ - начальная температура. Входящие в (1) производные дробного порядка определены следующим образом

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{T(\xi, z)}{(\tau-z)^\alpha} dz - \text{производная Римана-Лиувилля}$$

$$\frac{\partial^\beta T(\xi, \tau)}{\partial \xi^\beta} = \frac{\left(2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(2-\beta)\right)\right)^{-1}}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(\zeta, \tau)}{|\xi-\zeta|^{\beta-1}} d\zeta - \text{производная Рисса-Вейля}$$

Здесь $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера. Производная Римана-Лиувилля учитывает память (нелокальность во времени), производная Рисса учитывает пространственные корреляции (пространственная нелокальность).

Для решения уравнения (1) применим преобразование Фурье по координатной переменной ξ . Получим

$$\frac{\partial^\alpha \tilde{T}(k, \tau)}{\partial \tau^\alpha} - D |k|^\beta \tilde{T}(k, \tau) - \frac{\tilde{T}(k, 0)}{\Gamma(1-\alpha) \cdot \tau^\alpha} = 0 \quad (2)$$

Здесь $\tilde{T}(k, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(-ik\xi) T(\xi, \tau)$ Фурье-образ функции $T(\xi, \tau)$. Совершая преобразование Лапласа по переменной τ уравнение (2) дает

$$\tilde{\tilde{T}}(k, p) = \frac{\tilde{T}(k, 0)}{p^{1-\alpha} (p^\alpha + D |k|^\beta)} \quad (3)$$

где $\tilde{\tilde{T}}(k, p) = \int_0^\infty d\tau \exp(-p\tau) \tilde{T}(k, \tau)$ образ Лапласа функции $\tilde{T}(k, \tau)$. Совершая преобразование

Меллина получим следующее выражение для $\tilde{\tilde{T}}(k, \tau)$

$$\tilde{\tilde{T}}(k, \tau) = \tilde{T}(k, 0) E_{\alpha, 1}(-D |k|^\beta \tau^\alpha), \quad (4)$$

где $E_{\alpha, \beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha \cdot n + \beta)}$ Функция Миттаг-Леффлера. Совершая в (4) обратное преобразование Фурье окончательно получим решение уравнения (1) в виде

$$T(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-ik(\xi - \xi')) T(\xi', 0) E_{\alpha,1}(-D|k|^{\beta} \tau^{\alpha}) \quad (5)$$

Решение (5) если $\alpha = 1$ и $\beta = 2$ соответствует решению традиционного уравнения теплопроводности. Действительно, для случая $\alpha = 1$ имеем $E_{1,1}(-D|k|^{\beta} \tau) = \exp(-D|k|^{\beta} \tau)$ и (5) принимает вид

$$T(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-ik(\xi - \xi')) T(\xi', 0) \exp(-D|k|^{\beta} \tau) \quad (6)$$

Полагая в (6) $\beta = 2$ получим известное решение. Решение (6) для случая $1 < \beta < 2$ учитывает пространственные корреляции. Если в

(5) положить $\beta = 2$ а $0 < \alpha < 1$ то получим решение соответствующее учету эффектов памяти

$$T(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-ik(\xi - \xi')) T(\xi', 0) E_{\alpha,1}(-Dk^2 \tau^{\alpha}) \quad (7)$$

В общем случае уравнение (1) имеет новый класс решений, занимающий промежуточное положение между релаксационным и волновым поведением. Эти решения имеют квазиволновой характер. Другая особенность полученных решений в том, что они приводят к степенной зависимости от аргументов. В частности для случая, когда $T(\xi, 0) = T_0 \delta(\xi)$ для $\alpha = 1, \beta = 2$ имеем

$$T(\xi, \tau) = T_0 / \sqrt{4\pi D \tau} \cdot \exp(-\xi^2 / D \tau), \quad \text{а}$$

для $\alpha = 1, \beta \rightarrow 1$ получим

$$T(\xi, \tau) \rightarrow T_0 D \tau / (\xi^2 + (D \tau)^2).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. «Наука и техника», 1987.
2. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления. М: Физматгиз, 2003.
3. Мейланов Р.П. Обобщенное уравнение одномерной фильтрации с дифференцированиями дробной степени // ИФЖ. 2001. т.74. №2. с.1-4
- 4 Мейланов П., Янполов М.С. Особенности фазовой траектории фронтального осциллятора. // «Письма в ЖЭТФ» 2002.т.28.Вып 1. С.67-71.
5. Мейланов Р.П., Свешникова Д.А., Шабанов О.М. Метод дифференциальных уравнений в описании кинетики сорбций // ЖФХ. 2003. Т.77. С.260-264.
6. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. 2003. Т.173, №8. С.846-876.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОГОННОЙ МАССЫ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА НА СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ МИКРОУСКОРЕНИЙ

Седельников А.В., Подлеснова Д.П.

Институт энергетики и транспорта

*Самарского государственного аэрокосмического университета
Самара, Россия*

Введение

При построении фрактальной модели микроускорений с помощью функции Вейерштрасса-Мандельброта важно адекватно отождествить параметры функции с реальными физическими характеристиками возникновения поля микроускорений внутри космического аппарата (КА) при его орбитальном полете [1]. В ряде работ, посвященных этому отождествлению, фрактальная размерность функции D связывается с моментом от управляющих ракетных двигателей системы ориентации и управления движением КА (УРД) [2-4]. Рассматривается поле микроускорений создаваемое за счет колебаний больших упругих элементов (панелей солнечных батарей (ПСБ), радиатора, антенн и др.) сразу после выключения УРД [1].

Постановка задачи

Для исследования влияния погонной массы упругого элемента на среднее значение модуля микроускорений, создаваемых внутри КА при колебаниях этого элемента, была выбрана схема КА типа «НИКА-Т» с одним упругим элементом. Вектор момента от УРД был параллелен линии крепления упругого элемента к корпусу КА. Уравнения движения такого КА получены в работе [5]. Здесь упругий элемент рассматривается как жестко заделанная в корпус КА пластина.

Исследования, проведенные в [6] показали, что учет упругости узла крепления ПСБ не дает существенных поправок в модель создания поля микроускорений, немного снижая амплитуду микроускорений и частоту передаваемых на кор-