$$I_i^{испр} = I_i^{изм} \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta C_j\right) \quad (4)$$

позволяет по зависимости вида (5)

$$C_i = W_i\left(I_i^{испр}\right) = \frac{C_i^{OC}}{I_i^{OC}} \cdot I_i^{испр} \quad (5)$$

найти содержание определяемого элемента (компонента).

Диапазон изменения содержания элементов в анализируемых образцах 2-4% (*Ni*), 6-8% (*Zn*), 24-32% (*Ge*), 56-66% (*Mo*).

Эксперимент на математической модели в приближении возбуждения флуоресценции смешанным первичным излучением позволил получить результаты анализа с относительной среднеквадратической погрешностью $\sigma = 0{,}14\%$ (по данным 56 определений). Анализ тех же образцов с использованием «обобщенных» уравнений [3] общего вида (2) дал $\sigma = 0{,}26\%$.

Обобщенные уравнения построены на основе «квазиактивного» планирования (использовано допущение, что интенсивность элемента A пропорциональна содержанию элемента A, что справедливо только в первом приближении). При этом надо иметь в виду, что феноменологические уравнения (1) являются более корректными (определенными, однозначными), нежели «обобщенные» уравнения (2). Действительно, в любом случае факторы – содержания элементов коррелированы в меньшей степени, нежели факторы – интенсивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Чемлева Т.А., Микешина Н.Г. В кн.: Новые идеи в планировании эксперимента. Под ред. В.В. Налимова. М.: Наука, 1969. С. 199-208.
2. Блохин М.А., Белов В.Т., Дуймакаев Ш.И., Цопова-Гречишина Л.Н. / Заводская лаборатория. 1973. №9. С. 1081-1085.
3. Белов В.Т., Дуймакаев Ш.И. / Заводская Лаборатория. 1974. №8. С. 958-960.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИФФУЗИИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Мейланов Р.П., Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р.
Дагестанский государственный университет
Махачкала, Россия

В связи с проникновением идей фрактальной геометрии в современную науку предпринимаются активные попытки внедрения зависимостей с дробной размерностью для описания различных физико-химических процессов [1-4]. В ряде работ [1,5,6] показано, что в ветвящихся фрактальных структурах могут реализовываться сверхмедленные процессы переноса. Вместе с тем оказалось, что процессы, происходящие во фрактальных средах, можно описывать с помощью дифференциальных уравнений, содержащие дробные производные вместо обычных производных целого порядка.

В [1,2] показано, что ряд физико-химических систем, которые могут быть описаны уравнениями в дробных производных, должны содержать в себе каналы, входящие в состав ветвящейся фрактальной структуры.

Такими системами могут быть процессы теплопереноса и массопереноса в перколяционных кластерах, фрактальных и пористых средах. Причем [1,2] получено, что показатель дробной производной по времени соответствует доли каналов (ветвей), открытых для протекания. В [5] показано, что аномальная диффузия (диффузия Леви) имеет фрактальную природу, и получена взаимосвязь порядка дробной производной с показателями масштабного преобразования времени и Херста.

Рассмотрим обобщенную задачу диффузии на полупрямой:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ &u(0,t) = A \qquad 0 < x < +\infty \\ &\qquad\qquad\qquad 0 < t < +\infty \\ &u(x,t=0) = u(x,0) \end{aligned} \quad (1)$$

где t- время, u(x,t)-концентрация диффундирующего компонента; α – дробный порядок производной (характеризующий долю каналов, открытых для протекания), 0< α <1, D^2 -эффективный коэффициент диффузии на фрактале.

Для учета начального условия $u(x,t=0) = u(x.0)$ необходимо его явно внести в уравнение и исходить из уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{u(x,0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} - D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^\alpha} = 0$$

Для нахождения решения этой задачи сначала применим синус преобразования по переменной x после применяя преобразования Лапласа получим:

$$U(\omega,p)=\frac{2AD\ \omega}{\pi}\cdot\frac{1}{p(p^{\alpha}+D\omega^{2})}+U(\omega,0)\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha}+D\omega^{2}}.$$

После преобразования выражений $\frac{1}{p(p^{\alpha}+D\omega^{2})}$, $\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha}+D\omega^{2}}$, получим:

$$\frac{1}{p(p^{\alpha}+D\omega^{2})}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^{\alpha}E_{\alpha,1+\alpha}(-D\omega^{2}t^{\alpha})dt=\frac{1}{D\omega^{2}}\int_0^{+\infty}e^{-pt}(1-E_{\alpha,1+\alpha}(-D\omega^{2}t^{\alpha}))dt\ ,$$

$$\frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}+D\omega^{2}}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}E_{\alpha,1}(-D\omega^{2}t^{\alpha})dt\ .$$

Из этих равенств следует:

$$U(\omega,p)=\frac{2A}{\omega\pi}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left[1-\mathrm{E}_{\alpha,1}(-D\ \omega^{2}t^{\alpha}\right]dt+U(\omega,0)\int_0^{\infty}e^{-pt}E_{\alpha,1}(-D\omega^{2}t^{\alpha})dt,$$

$$U(\omega,t)=\frac{2A}{\omega\pi}\left[1-\mathrm{E}_{\alpha,1}(-D\omega^{2}t^{\alpha}\right]+U(\omega,0)E_{\alpha,1}(-D\omega^{2}t^{\alpha}),$$

$$u(x,t)=F_s^{-1}[U],$$

$$u(x,t)=\frac{2A}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\left[1-\mathrm{E}_{\alpha,1}(-D\ \omega^{2}t^{\alpha}\right]\sin\omega x d\omega+\int_0^{\infty}U(\omega,0)E_{\alpha,1}(-D\omega^{2}t^{\alpha})\sin\omega x d\omega. \quad (3)$$

где $E_{\alpha,\beta}(-z^{\alpha})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha\cdot n+\beta)}$ - функция Миттаг-Леффлера.

Рассмотрим случай, когда $u(x,t=0)=u_0\delta(x)$ тогда

$$u(x,t)=\frac{2A}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\left[1-\mathrm{E}_{\alpha,1}(-D\ \omega^{2}t^{\alpha}\right]\sin\omega x d\omega+u_0\int_0^{\infty}E_{\alpha,1}(-D\omega^{2}t^{\alpha})\sin\omega x d\omega.$$

При $\alpha=1$ получаем решение:

$$u(x,t)=A\cdot erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)+u_0\sqrt{\frac{\pi}{4Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-i\cdot erf\left(-\frac{ix}{2\sqrt{Dt}}\right)\right),$$

где $erfc(x)=\frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt.$

А в остальных случаях, когда 0< α <1, мы получаем новый класс решений. Полученное решение (3) можно использовать при исследовании процессов диффузии в системах, обладающих фрактальной структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Nigmatullin R.R. //Phys. Stat. Solidi (b). 1986. V. 133. P. 425.
2. Nigmatullin R.R. // Ibid.1986. V.133. P.713.
3. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен. Методы расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия, 1986. 144с.
4. Нигматулин Р.Р. ТМФ. 1992. Т.90. №3. С.354.
5. Суханов А.Д., Тимашев С.Ф. // Журнал физ. химии. 1998. Т.72. №11. С. 2073.
6. Иванова В.С., Балакин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А. Синергетика и фракталы в материаловедении. М.: Наука, 1994. 383 с.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка

и некоторые их приложения. Минск: наука и техника, 1987.

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВДНОСТИ ДЛЯ СРЕД С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

Мейланов Р.П., Шабанова М.Р.
Институт проблем геотермии ДагНЦ РАН
Махачкала, Россия

Особенности физических свойств систем с фрактальной структурой связаны с проявлением эффектов памяти, пространственных корреляций и процессами самоорганизации. Создание адекватных количественных моделей для исследования свойств систем с фрактальной структурой требует привлечения математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка [1-2]. С этим и связан повышенный интерес к приложению математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка к задачам тепломассопереноса [3-5]. В настоящем сообщение приводится решение обобщенного уравнения теплопроводности с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi,\tau)}{\partial\tau^\alpha} - D\frac{\partial^\beta T(\xi,\tau)}{\partial\xi^\beta} - \frac{T(\xi,0)}{\Gamma(1-\alpha)\cdot\tau^\alpha} = 0 \qquad (1)$$

где $0<\alpha\le 1, 1<\xi\le 2$, $\tau>0, |\xi|<\infty$, $\tau = t/t_0, \xi = x/x_0$ безразмерные время и координата, t_0, x_0 - характерные время и масштаб, $D = \chi\frac{t_0}{x_0^2}$, χ - коэффициент температуропроводности, $T(\xi,0)$ - начальная температура. Входящие в (1) производные дробного порядка определены следующим образом

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi,\tau)}{\partial\tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau \frac{T(\xi,z)}{(\tau-z)^\alpha}$$ - производная Римана-Лиувилля

$$\frac{\partial^\beta T(\xi,\tau)}{\partial\xi^\beta} = \frac{\left(2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(2-\beta)\right)\right)^{-1}}{\Gamma(2-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{T(\zeta,\tau)}{|\xi-\zeta|^{\beta-1}}d\zeta$$ - производная Рисса-Вейля

Здесь $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера. Производная Римана–Лиувилля учитывает память (нелокальность во времени), производная Рисса учитывает пространственные корреляции (пространственная нелокальность).

Для решения уравнения (1) применим преобразование Фурье по координатной переменной ξ. Получим

$$\frac{\partial^\alpha \tilde{T}(k,\tau)}{\partial\tau^\alpha} - D|k|^\beta\tilde{T}(k,\tau) - \frac{\tilde{T}(k,0)}{\Gamma(1-\alpha)\cdot\tau^\alpha} = 0 \qquad (2)$$

Здесь $\tilde{T}(k,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\exp(-ik\xi)T(\xi,\tau)$ Фурье-образ функции $T(\xi,\tau)$. Совершая преобразование Лапласа по переменной τ уравнение (2) дает

$$\tilde{\tilde{T}}(k,p) = \frac{\tilde{T}(k,0)}{p^{1-\alpha}\left(p^\alpha + D|k|^\beta\right)} \qquad (3)$$

где $\tilde{\tilde{T}}(k,p) = \int_0^\infty d\tau\exp(-p\tau)\tilde{T}(k,\tau)$ образ Лапласа функции $\tilde{T}(k,\tau)$. Совершая преобразование Меллина получим следующее выражение для $\tilde{T}(k,\tau)$

$$\tilde{T}(k,\tau) = \tilde{T}(k,0)E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha), \qquad (4)$$

где $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha\cdot n+\beta)}$ Функция Миттаг-Леффлера. Совершая в (4) обратное преобразование Фурье окончательно получим решение уравнения (1) в виде