УДК 530.1.076

РАБОТА ДЕФОРМАЦИИ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Иванов Е.М.
Димитровградский институт технологии, управления и дизайна
Подробная информация об авторах размещена на сайте
«Учёные России» - http://www.famous-scientists.ru

Показано, что работа растяжения пружины $A > kx_m^2$, где k - жесткость пружины, x_m - максимальное растяжение. При вычислении работы $A = \int F(x)dx$ надо использовать значения x и dx, полученные из решения уравнения движения.

Рассмотрим спиральную пружину, один конец которой закреплен (рис. 1a), а к другому прикреплен груз массой m. Если пружину растянуть или сжать, то возникает сила F, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. При небольших растяжениях x справедлив закон Гука – сила пропорциональна растяжению пружины: $F = -kx$. Постоянная k называется коэффициентом упругости, или жесткостью пружины. Знак минус означает, что сила F направлена в сторону, противоположную смещению x, т.е. к положению равновесия $x = 0$. Геометрически (рис. 1b) $k = \mathrm{tg} b$, x_m - максимальное (амплитудное) растяжение пружины.

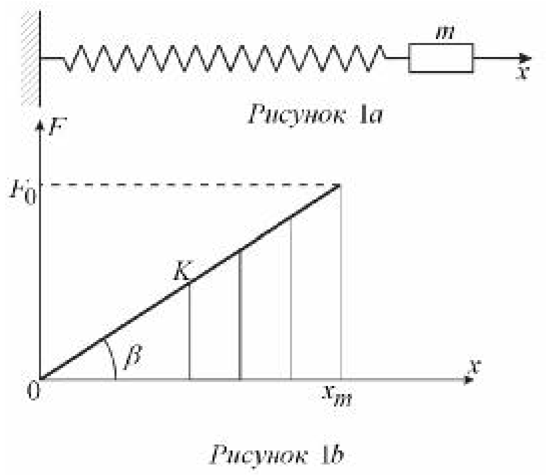

Рисунок 1a

Рисунок 1b

В курсах физики утверждается, что работа при растяжении от $x = 0$ до x_m будет равна

$$A = \int_0^{x_m} Fdx = k\int_0^{x_m} xdx = \frac{1}{2}kx_m^2 \qquad (1)$$

и эта работа равна потенциальной энергии пружины, растянутой (или сжатой) на величину x_m и обладающей жесткостью k. Однако это одно из заблуждений классической механики. Растягивающей силой, равной $F = kx$, нельзя растянуть пружину даже на долю микрона. Чтобы растянуть пружину, надо приложить растягивающую силу в виде $(F_1 + k_1 x)$, где $F_1 > 0$ (рис. 2a). Уравнение движения (II закон Ньютона) запишем в следующем виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - (k - k_1)x \qquad (2)$$

Решение при нулевых начальных условиях (при $t = 0$, $x = 0$ и $V = 0$) имеет вид

$$x = \frac{F_1}{mw^2}(1 - \cos wt)\,; \qquad w^2 = \frac{k - k_1}{m} \qquad (3)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{F_1}{mw}\sin wt \qquad (4)$$

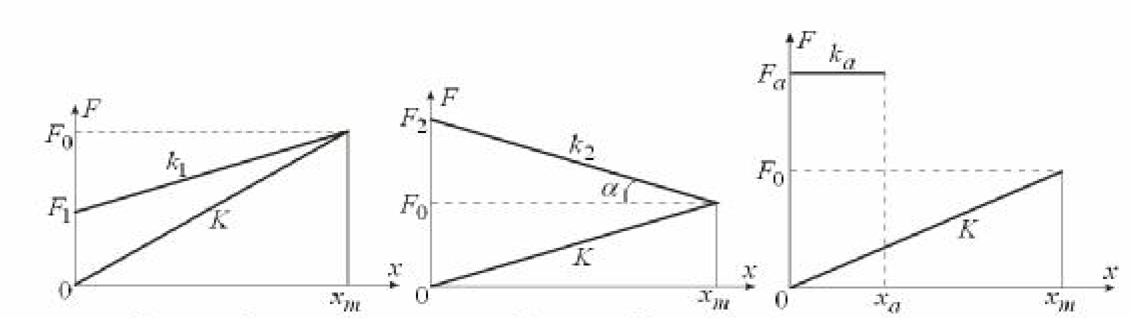

Рисунок 2a Рисунок 2b Рисунок 2c

Из решения следует, что если $F_1 = 0$, то растяжения пружины не происходит. Амплитудные значения (при $x = x_m$):

$x_m = F_1 / mw^2$,

$t_m = p\ /2w = p\sqrt{m}/2\sqrt{k-k_1}$,

$V_m = F_1/\sqrt{m(k-k_1)} = x_m\sqrt{(k-k_1)/m}$.

Работу вычисляем по формуле $A = \int Fdx$, где $F = F_1 - (k-k_1)x$, а x и dx определяются из выражений (3) и (4). Работа, совершаемая растягивающей силой

$$A_+ = \frac{F_1^2}{k-k_1} + \frac{k_1F_1^2}{(k-k_1)^2} + \frac{kF_1^2}{2(k-k_1)^2} = \frac{3}{2}\frac{kF_1^2}{(k-k_1)^2} \tag{5}$$

Работа, совершаемая силой упругости пружины

$$A_- = -\frac{kF_1^2}{(k-k_1)^2} - \frac{k_1F_1^2}{2(k-k_1)^2} = -\frac{2k+k_1}{2(k-k_1)^2}F_1^2 \tag{6}$$

Из соотношения (5) следует, что работа, совершаемая растягивающей силой, не зависит от величин F_1 и k_1 и равна работе

$$A_+^0 = \frac{3}{2}\frac{F_0^2}{k} = \frac{3}{2}kx_m^2 \tag{5a}$$

совершаемой постоянной силой F_0, при этом работа, совершаемая силой упругости пружины $A_-^0 = -kx_m^2$, разность работ $\Delta A_0 = kx_m^2/2$, конечная скорость при $x = x_m$ $V_0 = F_0/\sqrt{mk}$. На рис. 3 даны графики зависимостей V_m/V_0 и $\Delta A = kx_m^2$ от величины отношения K_1/K. ΔA – кинетическая энергия груза.

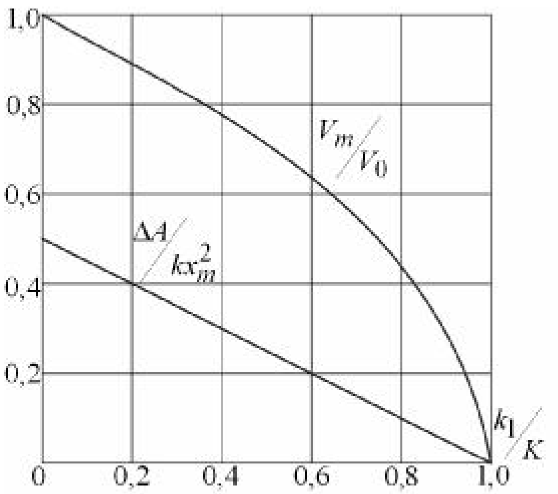

Рисунок 3

Рассмотрим случай растягивающей силы $F_P > F_0$ (рис.2b) $F_P = F_2 + k_2x = F_2 - b^2x$, где $b^2 = -k_2 = \text{tg}a$. Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_2 - (b^2+k)x \tag{7}$$

Его решение при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$x = \frac{F_2}{mw^2}(1-\cos wt) \ ; \ w^2 = \frac{b^2+k}{m} \tag{8}$$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{F_2}{mw}\sin wt \tag{9}$$

Амплитудные значения (при $x = x_m$): $x_m = F_2 / mw^2$; $t_m = p / 2w = p\sqrt{m} / 2\sqrt{b^2+k}$; $V_m = F_2 / \sqrt{m(b^2+k)} = x_m\sqrt{b^2+k} / \sqrt{m}$.

Работа, совершаемая растягивающей силой

$$A_+ = \frac{3}{2}\frac{F_2^2}{mw^2} = \frac{3}{2}\frac{F_2^2}{(b^2+k)} = \frac{3}{2}(b^2+k)x_m^2 \tag{10}$$

Работа, совершаемая силой упругости пружины

$$A_- = -\frac{F_2^2}{b^2+k} = -(b^2+k)x_m^2 \tag{11}$$

Кинетическая энергия груза при $x = x_m$

$$K_m = A_+ + A_- = \Delta A = (b^2+k)x_m^2 / 2 \tag{12}$$

На рис. 4 даны графики изменения безразмерных комплексов $\Delta A / kx_m^2$ и V_m / V_0 в зависимости от величины отношения k_2 / k.

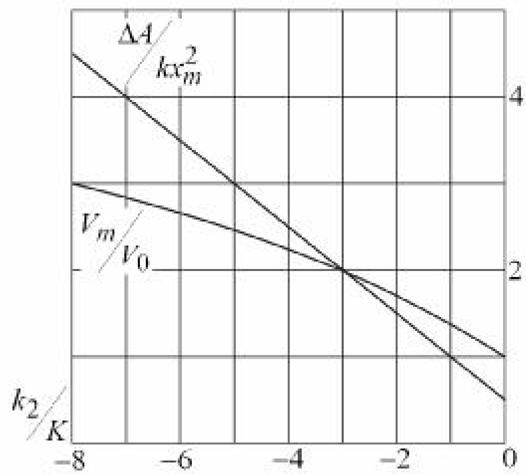

Рисунок 4

Рассмотрим третий способ растяжения пружины с грузом (рис. 2с). Прикладываем растягивающую силу $F_a >> F_0$ для растяжения пружины на некоторое расстояние x_a, затем сила F_a отключается, а оставшийся отрезок пути, равный $x_m - x_a$, груз проходит по инерции, используя запас кинетической энергии K_a, приобретенный в точке x_a. Для первого участка пути дифференциальное уравнение имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_a - kx \tag{13}$$

Его решение при нулевых начальных условиях:

$$x = \frac{F_a}{k}(1-\cos wt); \quad w^2 = \frac{k}{m} \tag{14}$$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{F_a}{\sqrt{km}}\sin wt \tag{15}$$

Время движения до $x = x_a$

$$t_a = \frac{1}{w}\arccos(1-\frac{kx_a}{F_a}) \tag{16}$$

Работу вычисляем по формуле $A = \int F(x)dx$, где $F(x) = F_a - kx$, а x и dx определяются выражениями (14) и (15). Работа растяжения на участке до $x = x_a$

$$A_+^a = \frac{F_a^2}{k}\left(\frac{3}{2} - \cos wt_a - \frac{1}{2}\cos^2 wt_a\right) \qquad (17)$$

Работа, совершаемая силой упругости пружины на этом же участке

$$A_-^a = -\frac{F_a^2}{k}(1 - \cos wt_a) = -F_a x_a \qquad (18)$$

Кинетическая энергия, приобретенная грузом:

$$K_a = \frac{F_a^2}{2k}\sin^2 wt_a \qquad (19)$$

Для второго участка уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (20)$$

Начальные условия для этого уравнения примем в виде: при $t = 0$ координата $x = x_a$, скорость V_a определяется выражением (15) при $t = t_a$. Решение будет иметь вид:

$$x = x_a \cos wt + \frac{V_a}{w}\sin wt \qquad (21)$$

$$dx = -wx_a \sin wtdt + V_a \cos wtdt \qquad (21a)$$

Работа силы упругости пружины на участке от $x = x_a$ до x_m определится интегралом $A_2 = \int kxdx$, где x и dx определяются выражениями (21) и (21а):

$$A_2 = \frac{kV_a^2}{2w^2} - \frac{1}{2}kx_a^2 + \cos^2 wt_m\left[\frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{kV_a^2}{2w^2}\right] + \frac{kx_aV_a}{2w}\sin 2wt_m \qquad (22)$$

где t_m — время движения груза от $x = x_a$ до $x = x_m$. Условием достижения этой точки является равенство начальной кинетической энергии K_a работе силы упругости пружины A_2. Это равенство сводится к трансцендентному уравнению

$$a + \frac{b}{2}(1 + \cos 2j) - c\sin 2j = 0 \qquad (23)$$

где $a = kx_a^2/2$; $b = K_a - a$; $c = kx_aV_a/2w$; $j = wt_m$.

Приведем численный пример. Груз массой $m = 1$ кг, прикрепленный к пружине с жесткостью $k = 400$ Н/м, растягивается силой $F_0 = 80$ Н на расстояние $x_m = 0{,}2$. Работа силы растяжения $A_+ = 3F_0^2/2k = 3kx_m^2/2 = 24$ Дж, работа силы упругости пружины $A_- = -F_0^2/k = -kx_m^2 = -16$ Дж, время $t = 0{,}0785$ с.

Проведем растяжение силой F_a по схеме, показанной на рис. 2с. Расчет сведем в таблицу 1.

Таблица 1.

F_a[Н]	K_a[Дж]	t_a[с]	x_a[м]	A_+[Дж]	A_-[Дж]	t_m[с]
8000	8	0,0005	0,001	16	-8	0,078
800	7	0,00468	0,00876	14,015	-7,015	0,0762
200	6	0,0176	0,0309	12,19	-6,19	0,0696
80	3,75	0,0377	0,054	8,088	-4,338	0,0597

Таким образом, только в случае растяжения пружины с грузом по схеме, показанной на рис.2с, можно затратить работу на растяжение A_+ , близкую к потенциальной энергии растянутой пружины $\Pi = kx_m^2 / 2$.

WORK OF DEFORMATION OF THE SPRING PENDULUM

Ivanov E.M.
Dimitrovgrad Institute of Technology, Management and Design

It is shown, that work of a stretching of a spring $A > kx_m^2$, where k - rigidity of a spring, x_m - the maximal stretching. At calculation of work $A = \int F(x)dx$ it is necessary to use values x and dx, the equations of movement received from the decision.