С-ТОЧНЫЕ ПАРЫ НАТУРАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В АНАЛИЗЕ И В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Сухотин А.М.
Томский политехнический университет
Томск, Россия

В докладе рассматриваются инъективные отображения $\varphi: N \to \boldsymbol{N}$ на множестве $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел и некоторые приложения понятия *C*-точной пары переменных.

1. О *C*-точных парах переменных и сюръективности отображений $\varphi: N \to \boldsymbol{N}$

Пара (m, k) натуральных переменных $m \in A$ и $k \in B$ называется [1] *C*-точной парой, если для каждых соседних в $E \triangleq A \cup B \subseteq \boldsymbol{N}$ элементов m и k найдётся число C такое, что

$$|m-k|<C. \tag{1}$$

Пусть $\xi \triangleq \{1, n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\} \subset \boldsymbol{N}$, $N(\xi) \triangleq \{i : \exists n_i \in \xi\} \subset \boldsymbol{N}$ и $\forall i \in N(\xi) \ \ n_i > i$. Пусть далее, $N_i \triangleq \{1, 2, \ldots, n_i\}$ и $D_i \triangleq N_i \setminus \varphi(N_i)$. Функция φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ и ξ определяют последовательности $\{\delta_i\}$ и $\{d_i\}$, $i \in N(\xi)$, где $\delta_i \triangleq \max\limits_{n \le n_i} \{\varphi(n)-n_i\} \ge 0$ и $d_i \triangleq |D_i| \ge 0$. Очевидно, что условие $\exists \xi \ \forall i \in N(\xi) \ \ d_i = 0$ является достаточным для сюръективности отображения φ. Примеры показывают, что это условие не является необходимым. Функция φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ определяет последовательность $\{\varphi_n\}$, $n \in \boldsymbol{N}$, целых чисел $\varphi_n \triangleq \varphi(n)-n$. Очевидно, что если $\delta_\xi \triangleq \sup\limits_{i \in N(\xi)} \{\delta_i\}$ и $\delta_\varphi \triangleq \sup\limits_{n \in N} \{\varphi_n\}$, то $\delta_\xi \le \delta_\varphi$. Но существует пара $(\xi, N(\xi))$ такая, что

$$\delta_\xi = \delta_\varphi. \tag{2}$$

Доказаны с использованием, в частности, (2) следующие предложения.

Утверждение 1. Для инъекции φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ справедливо следующее условие:

$$(\exists C_1 \forall n \in N \ \ \varphi_n \le C_1) \Leftrightarrow (\exists C_2 \forall i \in N(\xi) \ d_i \le C_2) \Leftrightarrow (\exists C_3 \forall i \in N(\xi) \ \ \delta_i \le C_3) \tag{3}$$

Утверждение 2. Если $\varphi(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{N}$, то $\exists C$, $C \ge 0$:

$$\forall n \in N \ \ \varphi_n \le C \ \text{ и } \lim(\varphi(n) : n) = 1. \tag{4}$$

Утверждение 3. Если $\varphi(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{N}$, то

$$\forall \ i \in \boldsymbol{N}(\xi) \ \exists \ j \in \boldsymbol{N} : \ D_i \cap D_{i+j} = \varnothing, \text{ или, что эквивалентно, } \boldsymbol{N}_i \subset \varphi(\boldsymbol{N}_{i+j}). \tag{5}$$

Теорема 1. Условия (4) и (5) являются независимыми необходимые условиями сюръективности инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, а их совместное выполнение является достаточным условием сюръективности этого отображения.

Утверждение 4. Из условия (3) следует, что для любой последовательности ξ существует число C_ξ, $C_\xi > 0$, такое, что $\forall i \in N(\xi) \ \ n_{i+1} - n_i < C_\xi$.

Утверждение 5. Для всякой пары (m, k) переменных $m \in A$ и $k \in B$ $A \cup B \triangleq E \subseteq \boldsymbol{N}$ существует число $C>0$ такое, что пара (m, k) является *C*-точной парой (1).

Следствием Теоремы 1 является [1, с. 89]

Теорема 2. Не существует биекции между множеством $\boldsymbol{N}$ и его собственным подмножеством.

2. Приложения понятия *C*-точной пары переменных

Определение 1. Числовая последовательность $(\boldsymbol{a})$ называется (ср. [1, с. 98]) w-сходящейся последовательностью (widely convergent sequence – w-***CS***), если:

$$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n(\varepsilon) \in N) : \ (\forall \ n \ge n(\varepsilon) \ | a_{n+1} - a_n | < \varepsilon) \tag{6}$$

С помощью понятия C-точной пары (1) и условия (6) доказано, что множество $\{w\text{-}\boldsymbol{CS}\}$ совпадает с множеством $\{\boldsymbol{FS}\}$ фундаментальных последовательностей (последовательностей Коши). Не ограниченная конечным числом последовательность Коши $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится, по определению [1, с. 100], к бесконечно большому числу (***ILN***) $\Omega(a)$. Например, последовательность $\{(n)^{1-\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ для $\alpha > 0$ является w-***CS***, так как

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} = \frac{n+1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{n}{n^{\alpha}} < \frac{n+1}{n^{\alpha}} - \frac{n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \to 0.$$

Переход от теории числовых последовательностей к анализу даёт [1, с. 101]

Теорема 3. Неограниченная дифференцируемая в $\pm\infty$ функция $f:\ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ сходится к соответствующему ***ILN*** $\Omega(f)$ тогда и только тогда, когда $f'(\infty) = 0$.

Предельный переход в формуле Лагранжа, записанной для функции f:

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi)((n+1) - n),\ n < \xi < n+1,$$

составляет доказательство Теоремы 3.

Теорема 3 позволяет доказать, что последовательность $\{a_n\}$, определённая для всех $n \in \boldsymbol{N}$, например, формулой $a_n = Cn^{1-\alpha}(\ln n)^{\beta}$, при $\alpha > 0,\ \beta, C \in \boldsymbol{R}, C \neq 0$, сходится к соответствующему ***ILN*** $\Omega(\alpha, \beta, C)$.

Как известно, количество $\pi(x)$ простых чисел p, $p \le x$, определяется асимптотической формулой $\pi(x) \sim g(x) \overset{\Delta}{=} \dfrac{x}{\ln x}$, $x \in \boldsymbol{R}$. Так как функция g неограниченна и $g'(\infty) = 0$, то по Теореме 3 $\exists$ ***ILN*** $\Omega(g) = g(\infty)$. Следовательно, количество всех простых чисел равно некоторому ***ILN*** Ω_{π}, что объясняет неограниченность последовательности $\{p_{n+1} - p_n\}$, $n \in \Omega_{\pi} \subset N$, расстояний между последовательными простыми числами.

Пусть для сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $S_k \overset{\Delta}{=} \sum_{n=1}^{k} a_n$ и $R_{k,m} \overset{\Delta}{=} S_m - S_k$. Следовательно, остаток r_k ряда определяется равенством $r_k = \lim\limits_{m\to\infty} R_{k,m} = \lim\limits_{m\to\infty} \sum_{n=k+1}^{m} a_n$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \lim\limits_{k\to\infty}(\lim\limits_{p\to\infty} R_{k,p})$. Пара (k, m) переменных в последнем предельном равенстве является (Утверждение 5) C-точной парой натуральных переменных, то есть $\exists C$, $C>0$, такое что, $m = k + q(k),\ q(k) \in \boldsymbol{Z},\ |q(k)| < C.$ Поэтому из $a_n \to 0$ следует [1, с. 105], что

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty}(\lim_{p\to\infty} R_{k,p}) = \lim_{k\to\infty}(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=k+1}^{m} a_n) = 0.$$

Доказана [1, с. 107] независимость сходимости числового знакопеременного ряда от перестановки его слагаемых, для чего, в частности, из понятия частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и его остатка были выделены значения этих сумм (конечной и бесконечной, соответственно). Это утверждение иллюстрируется с помощью C-точной пары (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Сухотин А.М. Начало высшей математики: учеб. пособие . – 2-е изд., перераб. и доп. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 148 с.

Работа представлена на научную международную конференцию «Проблемы высшего и профессионального образования», 8-15 августа 2007 г., Коста Брава (Испания). Поступила в редакцию 05.06.2007.

УНИВЕРСИТЕТСКИЕ КЛАССЫ – ЭФФЕКТИВНАЯ ФОРМА ОРГАНИЗАЦИИ ДОВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ

Хусаинов М.А., Хлебникова Т.Д., Любина Н.И., Цыбина А.П.
Уфимский государственный нефтяной технический университет, лицей № 83
Уфа, Россия

Центр довузовского образования УГНТУ (ЦДО) постоянно занимается разработкой новых образовательных программ для различных кате-