УДК 519.816

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ИГРА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ С ФУНКЦИЯМИ РИСКА

Родюков А.В., Тараканов А.Ф.[1]
Борисоглебский государственный педагогический институт, Борисоглебск

В РАБОТЕ ИССЛЕДОВАНА ДВУХУРОВНЕВАЯ ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ИГРА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ С ФУНКЦИЯМИ РИСКА ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ СТРАТЕГИЯХ ИГРОКОВ. МЕЖДУ ИГРОКАМИ УРОВНЕЙ СТРОИТСЯ РАВНОВЕСИЕ НЭША, А С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ РИСКА ИГРОКОВ ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ УЧИТЫВАЕТСЯ ПО СЛЕЙТЕРУ. ПОКАЗАНО, ЧТО ПРЕДЛАГАЕМОЕ ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ НЭША-СЛЕЙТЕРА ТАКОЙ ИГРЕ ЧАСТИЧНО ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМО И НЕУЛУЧШАЕМО. ВЫЯВЛЕНЫ СВОЙСТВА РАВНОВЕСИЯ И ФУНКЦИИ РИСКА. СФОРМУЛИРОВАН АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ.

1. Постановка задачи

Игра двух лиц в условиях неопределённости задаётся набором

$$\langle N=\{1,2\},\{X,Y\},\ f(x,y)\rangle. \qquad (1)$$

Здесь множество $N=\{1,2\}$ – номера игроков, $X=\prod_{i=1,2} X_i \subset R^n$ ($n=n_1+n_2$) – множество ситуаций $x=(x_1,x_2)$ игры, каждая из которых образуется соответствующими стратегиями игроков: $x_1 \in X_1 \subset R^{n_1}$ – стратегия игрока верхнего уровня (1-й игрок), $x_2 \in X_2 \subset R^{n_2}$ – стратегия игрока нижнего уровня (2-й игрок), $y \in Y \subset R^m$ – неопределённость, функция выигрыша i-го игрока задана непрерывной на $X \times Y$ скалярной функцией $f_i(x,y)$, вектор $f(x,y)=(f_1(x,y), f_2(x,y))$.

Цель i-го игрока – выбор такой стратегии, чтобы в ситуации $x=(x_1,x_2)$ его выигрыш $f_i(x,y)$ принял возможно большее значение. При этом каждый игрок при выборе своей стратегии ориентируется на возможность реализации наименее благоприятных для него значений неопределённости $y \in Y$. Предполагается, что игроки обладают достоверной информацией о стратегиях и множестве неопределённостей, игрокам известны функции выигрыша друг друга.

Игра протекает следующим образом. Первый игрок формирует подмножество стратегий

$$\tilde{X}_1=\{\tilde{x}_1 \in X_1 \mid f_1(\tilde{x}_1,x_2,y)=\sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1,x_2,y),\ x_2 \in X_2, y \in Y\}$$

и информирует о нем игрока нижнего уровня (2-го). В ответ 2-й игрок формирует подмножество стратегий

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.

$$\tilde{X}_2 = X_2(\tilde{x}_1) = \{\tilde{x}_2 = x_2(\tilde{x}_1) \in X_2 \mid f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, y) = \sup_{x_2 \in X_2} f_2(\tilde{x}_1, x_2, y),\ y \in Y\},$$

выбирает стратегию $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ и информирует о ней 1-го игрока. Стратегия 2-го игрока явно зависит от стратегии Центра, который принимает окончательное решение. Затем вычисляются значения функций выигрыша игроков.

На множестве $X \times Y$ определим функции риска игроков

$$F_i(x, y) = \sup_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{N \setminus i}, y) - f_i(x_1, x_2, y),\ \ i = 1,2.$$

2. Определение равновесия и его свойства

Определение 1. Тройку $(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*)$ назовём гарантированным равновесием Нэша-Слейтера в игре (1), если существует такая неопределённость y^*, что выполняются следующие условия:

1) ситуация $(x_1^*, x_2^*(x_1^*))$ является равновесной по Нэшу, то есть

$$\sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2^*(x_1), y^*) = f_1(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*), \qquad (2)$$

$$\sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_1^*, x_2, y^*) = f_2(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*), \qquad (3)$$

2) неопределённость y^* максимальна по Слейтеру, то есть для всех $y \in Y$ несовместна система неравенств

$$F_i(x^*, y^*) < F_i(x^*, y), \quad i \in N. \qquad (4)$$

Множество гарантирующих равновесий $(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*)$ игры (1) обозначим N_S. Решением игры назовём совокупность $(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*, \{F_i(x^*, y^*)\}_{i=1,2})$, $i = 1,2$.

Определение 2. Ситуации равновесия из множества N_S в игре (1) назовём частично взаимозаменяемыми, если для любых $(x_1^1, x_2^1, y^1) \in N_S$ и $(x_1^2, x_2^2, y^2) \in N_S$ выполняются равенства

$$f_i(x_1^i, x_2^i, y^i) = f_i(x_1^k, x_2^j, y^i), \quad i, k, j = 1,2, \quad k \neq j;$$
$$F_i(x_1^i, x_2^i, y^i) = F_i(x_1^k, x_2^j, y^i), \quad i, k, j = 1,2. \qquad (5)$$

Свойство 1. Ситуации равновесия из множества N_S в игре (1) частично взаимозаменяемы.

Доказательство. Возьмём произвольные $(x_1^1, x_2^1, y^1) \in N_S$ и $(x_1^2, x_2^2, y^2) \in N_S$. Согласно (2) и (3), имеем $(x_1^i, x_2^i) \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$, $i = 1,2$, и поэтому

$$f_1(x_1^i, x_2, y) = \sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2, y), \quad x_2 \in X_2, \quad y \in Y. \qquad (6)$$

Отсюда $f_1(x_1^1, x_2, y) = f_1(x_1^2, x_2, y)$. Полагая здесь $x_2 = x_2^i$, $y = y^i$, получим справедливость первого равенства в (5) при $i = 1$:

$$f_1(x_1^1, x_2^1, y^i) = f_1(x_1^2, x_2^1, y^i), \quad f_1(x_1^1, x_2^2, y^i) = f_1(x_1^2, x_2^2, y^i).$$

Аналогично равенство доказывается для f_2.

Далее, подставляя в функцию $F_1(x_1, x_2, y)$ значения $x_1 = x_1^i$ и $y = y^i$, получим $F_1(x_1^i, x_2, y^i) = \sup\limits_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2, y^i) - f_1(x_1^i, x_2, y^i)$, а с учётом (6) будет $F_1(x_1^i, x_2, y^i) = 0$. Это равенство выполняется для любых $i = 1,2$ и $x_2 \in X_2$. Поэтому при $x_2 = x_2^k$, $k = 1,2$, получим справедливость второго равенства в (5) при $i = 1$. Доказывается для F_2 аналогично. Свойство 1 доказано.

Таким образом, в отличие от обычных игр с равновесием Нэша (в которых взаимозаменяемости стратегий нет), в иерархической игре выполняется свойство частичной взаимозаменяемости ситуаций равновесия. Отметим, что для функции риска второе равенство в (5) означает полную взаимозаменяемость ситуаций равновесия.

Определение 3. Тройку $(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*) \in N_S$ назовём неулучшаемым гарантирующим равновесием Нэша-Слейтера в игре (1), если для любых $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ выполняются неравенства $f_i(x_1, x_2, y^*) \le f_i(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*), \quad i = 1,2$.

Свойство 2. Пусть $\sup\limits_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2, y^*) = 0$ при любых $x_2 \in X_2$, $\sup\limits_{x_2 \in X_2} f_2(x_1, x_2, y^*) = 0$ при любых $x_1 \in X_1$. Тогда любая тройка $(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*) \in N_S$ в игре (1) является неулучшаемым гарантирующим равновесием Нэша-Слейтера.

Доказательство. Пусть $(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*) \in N_S$. Из определения множества $\tilde{X}_1$ при $y = y^*$ и из (2) соответственно следует, что

$$f_1(x_1, x_2, y^*) \le f_1(\tilde{x}_1, x_2, y^*), \quad f_1(x_1, x_2^*(x_1^*), y^*) \le f_1(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*), \quad x_i \in X_i.$$

Так как при любых $x_2 \in X_2$ $f_1(\tilde{x}_1, x_2, y^*) = \sup\limits_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2, y^*) = 0$, то, полагая во втором неравенстве $x_1 = \tilde{x}_1$, получим $f_1(x_1, x_2, y^*) \le f_1(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*), \quad x_i \in X_i$, то есть $(x_1^*, x_2^*(x_1^*), y^*) \in N_S$ – неулучшаемое гарантирующее равновесие Нэша-Слейтера. Для функции f_2 доказательство аналогично. Свойство 2 доказано.

Рассмотрим иерархическую игру (1) как игру 1-го игрока со стратегией $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$ и 2-го игрока (неопределённости) со стратегией $y \in Y$, то есть

$$\langle X, Y, \Phi(x, y) \rangle, \qquad (7)$$

где $\Phi(x,y)=F_1(x,y)+F_2(x,y)$. Первый игрок стремится за счёт выбора $x=(x_1,x_2)\in X=X_1\times X_2$ минимизировать $\Phi(x,y)$, а 2-ой за счёт выбора $y\in Y$ – максимизировать её.

Свойство 3. Решение Нэша-Слейтера (x^*,y^*) игры (1) является седловой точкой игры (7), то есть $\Phi(x^*,y)\le\Phi(x^*,y^*)\le\Phi(x,y^*)$ для любых $x\in X$, $y\in Y$.

Доказательство. Так как y^* максимально по Слейтеру, то несовместна система неравенств $F_i(x^*,y^*)<F_i(x^*,y),\quad i\in N$. Суммируя, получаем невозможность неравенства

$$F_1(x^*,y^*)+F_2(x^*,y^*)<F_1(x^*,y)+F_2(x^*,y).$$

Значит, $\Phi(x^*,y^*)\ge\Phi(x^*,y)$. Далее, так как $x^*=(x_1^*,x_2^*(x_1^*))$ – ситуация равновесия по Нэшу, то

$$\sup_{x_1\in X_1} f_1(x_1,x_2^*(x_1),y^*)=f_1(x_1^*,x_2^*(x_1^*),y^*),$$

$$\sup_{x_2\in X_2} f_2(x_1^*,x_2,y^*)=f_2(x_1^*,x_2^*(x_1^*),y^*).$$

Отсюда

$$F_1(x^*,y^*)=\sup_{x_1\in X_1} f_1(x_1,x_2^*(x_1),y^*)-f_1(x_1^*,x_2^*(x_1^*),y^*)=0,$$

$$F_2(x^*,y^*)=\sup_{x_2\in X_2} f_2(x_1^*,x_2,y^*)-f_2(x_1^*,x_2^*(x_1^*),y^*)=0.$$

В то же время

$$F_1(x,y^*)=\sup_{x_1\in X_1} f_1(x_1,x_2,y^*)-f_1(x_1,x_2,y^*)\ge 0,$$

$$F_2(x,y^*)=\sup_{x_2\in X_2} f_2(x_1,x_2,y^*)-f_2(x_1,x_2,y^*)\ge 0.$$

Очевидно, что $F_1(x,y^*)+F_2(x,y^*)-(F_1(x^*,y^*)+F_2(x^*,y^*))\ge 0$ или $\Phi(x,y^*)-\Phi(x^*,y^*)\ge 0$, что и требуется. Свойство 3 доказано.

Пусть y^S – минимальная по Слейтеру неопределённость в задаче $\langle Y,\ \{f_i(x^*,y)\}_{i\in N}\rangle$, (x_1^*,x_2^*,y^*) – тройка из определения 1.

Свойство 4. Пусть $f_i(x^*,y)<0$, $i\in N$, $y\in Y$. Тогда риск игрока в ситуации x^* оценивается снизу неравенством $F_i(x^*,y^*)>f_i(x^*,y^S)$.

Доказательство. Так как y^* – максимальная по Слейтеру неопределённость, то для любых $y\in Y$ найдётся индекс $i=i(y)\in N$ такой, что $F_i(x^*,y^*)-f_i(x^*,y^S)\ge F_i(x^*,y)-f_i(x^*,y)$ или

$$F_i(x^*,y^*)-f_i(x^*,y^S)\ge\sup_{x_i\in X_i} f_i(x_i,x_{N\setminus i}^*,y)-2f_i(x^*,y).$$

Для всех $x_i \in X_i$ справедливо $\sup\limits_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, y) \geq f_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, y)$, поэтому при $x_i = x_i^*$ будет $F_i(x^*, y^*) - f_i(x^*, y^S) \geq -f_i(x^*, y)$. В силу $f_i(x^*, y) < 0$, $i \in N$, получим $F_i(x^*, y^*) - f_i(x^*, y^S) \geq \sup\limits_{y \in Y} | f_i(x^*, y) | > 0$. Свойство 4 доказано.

Содержательный смысл свойства 4 в том, что для получения большего гарантированного выигрыша при использовании функции риска, чем при использовании простых функций выигрыша $f_i(x, y)$, требуется больший риск.

Свойство 5. Пусть функции $f_i(x_1, x_2, y)$, $i \in N$, удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных (x_i, y) с константами L_i. Риск игрока в ситуации x^* оценивается сверху неравенством ($\tilde{x}_i = \arg \sup\limits_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, y^*)$)

$F_i(x^*, y^*) \leq L_i(\| \tilde{x}_i - x_i^* \| + \| y^S - y^* \|)$.

Доказательство. Как и при доказательстве свойства 4, имеем

$$F_i(x^*, y^*) - f_i(x^*, y^S) \geq F_i(x^*, y) - f_i(x^*, y) \text{ или}$$

$$F_i(x^*, y) - F_i(x^*, y^*) \leq f_i(x^*, y) - f_i(x^*, y^S),$$

$$F_i(x^*, y) - \sup_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, y^*) + f_i(x^*, y^*) \leq f_i(x^*, y) - f_i(x^*, y^S),$$

$$F_i(x^*, y) \leq f_i(x^*, y) + \sup_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, y^*) - f_i(x^*, y^*) - f_i(x^*, y^S).$$

При $y = y^*$ получаем $F_i(x^*, y^*) \leq \sup\limits_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, y^*) - f_i(x^*, y^S)$. С использованием условия Липшица приходим к требуемой оценке. Свойство 5 доказано.

Полученная оценка говорит о том, что величина риска игрока зависит в целом только от его стратегии и размеров множества неопределённостей. Воздействие других игроков косвенно учитывается в константе Липшица. Если игроки не отступают от своих оптимальных стратегий $(\tilde{x}_i = x_i^*)$, то оценкой риска сверху является $F_i(x^*, y^*) \leq L_i \| y^* - y^S \|$.

Свойства 1-5 в достаточной степени раскрывают свойства предлагаемого равновесия и содержательный смысл функции риска игрока и дополняют тем самым результаты [1].

3. Алгоритм решения игры

Найти $x_i(y)$, удовлетворяющие равенствам

$$\sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2, y) = f_1(x_1(y), x_2, y), \quad \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_1, x_2, y) = f_2(x_1, x_2(y), y).$$

Подставить $x_i(y)$ в функции $f_i(x_1, x_2, y)$ и получить функции $f_1(x_2, y)$ и $f_2(x_1, y)$. Эти функции выпуклы по обоим аргументам.

Вычислить величины

$$f_1^* = \max_{x_2 \in br(X_2), y \in br(Y)} f_1(x_2, y), \quad f_2^* = \max_{x_1 \in br(X_1), y \in br(Y)} f_2(x_1, y),$$

где $br(M)$ – граница множества M (вообще говоря, после 3 шага вместо $\sup_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{N \setminus i}, y)$ вычислены значения $f_i^* = \sup_{x_i \in X_i, y \in Y} f_i(x_1, x_2, y)$, $i = 1,2$, которые означают выигрыши игроков при наилучших для них действиях партнеров по иерархии и наилучшей неопределённости; однако легко показать, что стратегии и выигрыши игроков в этом случае не изменяются).

Составить функции риска игроков

$$F_1(x, y) = f_1^* - f_1(x_1, x_2, y), \quad F_2(x, y) = f_2^* - f_2(x_1, x_2, y)$$

и функцию $\Phi(x_1, x_2, y) = \alpha_1 F_1(x_1, x_2, y) + \alpha_2 F_2(x_1, x_2, y)$.

Найти гарантированную неопределенность y^* как решение задачи $\sup_{y \in Y} \Phi(x_1(y), x_2(y), y) = \Phi(x_1(y^*), x_2(y^*), y^*)$ и найти стратегии игроков $x_1^* = x_1(y^*)$, $x_2^* = x_2(y^*)$.

Вычислить риски игроков $F_i(x_1^*, x_2^*, y^*)$, $i = 1,2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

Hierarchic game under uncertainty
With risk functions

A.V. Rodjukov, A.F.Tarakanov
Borisoglebsk State Teachers Training Institute, Borisoglebsk

In the article, a two-level hierarchic game under uncertainty with risk functions and subject to constrained strategies of players is investigated. Between players the Nash equilibrium is defined, and with risk functions influence of uncertainty by Slater is counted. It is shown that suggested guaranteeing equilibrium by Nash-Slater is partially interchangeable and not improvable. Properties of equilibrium and function of risk are revealed. The algorithm of the solution is formulated.