УДК 530.1.076

# РАБОТА СИЛ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

**Иванов Е.М.**

**Если работа силы гравитации $F_3 = GMm/r^2$ при свободном падении тела $m$ от $r_0$ до $r_1$ равна $A_0 = m(j_1 - j_0)$, где $j = GM/r$ - гравитационный потенциал, то рбота сторонних сил для перемещения тела в противоположном направлении $A_c$ всегда много больше $A_0$. И только в идеальном (теоретическом) случае при действии мгновенной силы в виде $I_0 d(t)$, получаем $A_c \to A_0$. $I_0 = mV_1$ – единичный импульс силы, $d(t)$ - дельта – функция Дирака, $V_1$ - скорость тела в конце свобоного падения.**

Рассмотрим перемещение тела малой массы $m$ в гравитационном поле массивного тела массы $M$. В случае $m << M$ перемещением тела $M$ под действием силы гравитационного взаимодействия можно пренебречь и рассматривать только перемещение малого тела $m$ в гравитационном поле неподвижного тела $M$.

Рассмотрим вначале свободное падение тела $m$ от $r_0$ до $r_1$ (рис.1). Уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -F_3 \quad (1)$$

где $F_3 = GMm/r^2$, $G$ - гравитационная постоянная. Если в точке $r_0$ начальная скорость равна нулю, то решение запишется в виде

$$V^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \quad (2)$$

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{r_0}}} = \frac{r_0\sqrt{r_0}}{\sqrt{2GM}}\left[\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}} + ark\sin\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}\right] \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \quad (2a)$$

Работу, совершаемую силой тяготения, можно определить, используя формулу (2) на основе соотношения: $\Delta K = A_0 = -\Delta П$

$$A_0 = \frac{mV_1^2}{2} = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) \quad (4)$$

Если ввести понятие гравитационного потенциала $j = GM/r$, то выражение (4) для работы можно записать в виде

$$A_0 = m(j_1 - j_0) \quad (4a)$$

В работах [1-3] показано, что работу можно так же вычислить, используя импульс силы $I$:

$$A_0 = I_3^2/2m, \text{ где } I_3 = \int_0^{t_k} F_3 dt \quad (5)$$

где $t_k$ - время движения от $r_0$ до $r_1$, а $dt$ определяется выражением (2а). Чтобы переместить тело $m$ обратно из точки $r_1$ в $r_0$, необходимо приложить стороннюю силу $F$, большую, чем гравитационная сила $F_3 = GMm/r^2$ и направленную в противоположную сторону.

СЛУЧАЙ I. Сторонняя сила больше гравитационной на постоянную величину $\Delta F$, т.е. силы, действующие на тело $m$, можно представить в виде: $F - F_3 = F_1 + \Delta F - F_3$ где $F_1 = F_3$.

Под действием силы $\Delta F$ тело будет совершать равноускоренное движение. Соотношение между координатой и временем определяется выражениями: $dr = \Delta F t dt/m$ и $r = r_1 + \Delta F t^2/2m$.

Вычислим импульсы всех сил за время $t_k$ (время движения от $r_1$ до $r_0$):

$$I_1 = I_3 = \int_0^{t_k} GMm\frac{dt}{r^2} = \frac{GMm\sqrt{m}}{r_0\sqrt{2r_1\Delta F}}\left[q + \frac{r_0}{r_1}\operatorname{arctg}\, q\right] \quad (6)$$

$$I_2 = \int_0^{t_k} \Delta F dt = \sqrt{2m(r_0 - r_1)\Delta F}; \quad q = \sqrt{r_0/r_1 - 1} \quad (7)$$

Суммарная работа всех сил будет равна

$$A_\Sigma = (I_1 + I_2 - I_3)^2/2m = \left(I_1^2 + 2I_1I_2 + I_2^2 - I_3^2 - 2I_2I_3\right)/2m$$

Работа сторонней силы

$$A_+ = \left(I_1^2 + 2I_1I_2 + I_2^2\right)/2m \quad (8)$$

Работа гравитационной силы

$$A_- = -\left(I_3^2 + 2I_2I_3\right)/2m \quad (9)$$

Отдельные составляющие работы будут определяться выражениями:

$$\frac{I_1^2}{2m} = \frac{(GMm)^2}{4r_1^2 r_0 \Delta F}\left[\left(1 - \frac{r_1}{r_0}\right) + 2q\operatorname{arctg}\, q + \frac{r_0}{r_1}(q\operatorname{arctg}\, q)^2\right]$$

$$\frac{I_1I_2}{m} = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)\left[1 - \frac{r_1}{r_0} + \sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\operatorname{arctg}\, q\right]$$

$$\frac{I_2^2}{2m} = \Delta F\left(r_0 - r_1\right) \quad ; (10)$$

Работа $A_+$ имеет минимум, соответствующей силе

$$\Delta F_{\min} = \frac{GMm}{2r_0 r_1 q}\left[q^2 + \frac{2r_0}{r_1} q \operatorname{arctg} \ q + \left(\frac{r_0}{r_1} \cdot \operatorname{arctg} \ q\right)^2\right]^{1/2} \quad (11)$$

Приведем численный пример. Пусть тело массы $m = 1$ кг перемещается в гравитационном поле Земли $\left(M = 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{кг}, \ G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2\right)$ в пределах: $r_0 = 10^8$ м и $r_1 = 10^7$ м. В случае свободного падения в соответствии с (4) получаем $A = 35{,}9$ МДж. Гравитационные силы в точках $r_0$ и $r_1$, соответственно равны $F_0 = 0{,}0399$ Н, $F_1 = 3{,}99$ Н. Совершим перемещение в обратном направлении при $\Delta F = 0{,}1$ Н. Работу $A_+$ в соответствии с (8) получаем в следующем виде:

$A_+ = 174 + 9 + 954 = 1137$ МДж, что в 31,7 раза больше А. По формуле (11) опре деляем $\Delta F_{\min} = 1{,}03$ Н и затрачиваемую работу

$A_+^{\min} = 92{,}66 + 174{,}086 + + 92{,}65 = 359$,

что в 10 раз больше А.

СЛУЧАЙ II. Сторонняя сила больше гравитационной на некоторый постоянный коэффициент $b$. Тогда силы, действующие на тело, можно записать в виде $F = F_1 + F_2 - F_3$, где $F_2 = bF_1 = bGMm/r^2$. Под действием силы $F_2 = bF_1$ тело будет совершать ускоренное движение от $r_1$ к $r_0$. При нулевой начальной скорости, решая уравнение движения, последовательно находим:

$$dt = dr \Big/ \sqrt{2bGM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)} \quad (12)$$

$$V^2 = 2bGM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \quad (13)$$

$$t = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{2bGM}}\left[\sqrt{r}\sqrt{r - r_1} + r_1 \ln\left(\sqrt{\frac{r}{r_1} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_1}}\right)\right] \quad (14)$$

Импульсы сил при движении тела $m$ от $r_1$ до $r_0$ соответственно равны

$$I_1 = I_3 = \frac{m\sqrt{2GM}}{\sqrt{b}}\sqrt{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}}\ ; \qquad I_2 = m\sqrt{2bGM}\sqrt{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}} \quad (15)$$

Работа сторонней силы

$$A_+ = \left( \frac{1}{b} + 2 + b \right) GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (16)$$

Работа гравитационной силы

$$A_- = -\left( \frac{1}{b} + 2 \right) GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (17)$$

Выражение (16) имеет минимум при $b = 1$ (рис. 2)

$$A_+^{\min} = 4GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (18)$$

Что в 4 раза больше работы свободного падения $A$, определяемой выражением (4), при этом работа гравитационной силы $A_- = -3GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right)$. При $b >> 1$ работа гравитационной силы стремится к минимальной величине, равной $A_- = -2GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right)$ (рис. 3).

СЛУЧАЙ III. Для перемещения тела $m$ от $r_1$ к $r_0$ на него в течении небольшого времени $t_*$ (при перемещении до $r_*$) действует постоянная сила $F_0 > F_3$, обеспечивающая в точке $r_*$ кинетическую энергию

$$K_* = \frac{mV_*^2}{2} = GMm \left( \frac{1}{r_*} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (19)$$

обеспечивающую перемещение тела $m$ по инерции от $r_*$ до $r_0$. Уравнение движения в этом случае запишется в виде:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_0 - F_3 \quad (20)$$

При нулевых начальных условиях получим для участка от $r_1$ до $r_*$:

$$V^2 = 2 \left( \frac{F_0}{m} - \frac{GM}{r_1 r} \right) (r - r_1) \quad (21)$$

$$dr = V(r) dt; \qquad t = \int_{r_1}^{r} [V(r)]^{-1} dr \quad (22)$$

Квадрат импульсов сил $(I_0 - I_3)^2 = I_0^2 - 2I_0 I_3 + I_3^2$. Суммарная работа всех сил на участке от $r_1$ до $r_*$:

$$A_\Sigma = \left(I_0^2 - 2I_0I_3 + I_3^2\right)/2m \quad (23)$$

Работа силы тяги $F_0$ будет равна $A_+ = I_0^2/2m$, «антиработа» гравитационной силы $A_- = -(2I_0I_3 - I_3^2)/2m$

Приближенные значения этих работ:

$$A_+ \cong F_0(r_* - r_1) \quad (24)$$

$$A_- = -GMm\sqrt{r_* - r_1}\,\Phi(r) + (GMm)^2\Phi^2(r)/4F_0 \quad (25)$$

$$\Phi(r) = \frac{\sqrt{r_* - r_1}}{r_1 \cdot r_*} + \frac{1}{r_1^{3/2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r_*}{r_1} - 1}$$

В случае $F_0 >> F_3$ будем иметь

$$F_0(r_* - r_1) \cong GMm\left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r_0}\right) \quad (26)$$

при этом $r_* \to r_1$, а $A_+ \to A_0$, определяемой выражением (4). Идеальным вариантом этого случая является действие мгновенной силы, для чего следует устремить время действия силы $t_* \to 0$, а величину силы $F_0 \to \infty$. Тогда получим мгновенную силу в виде $I_0 d(t)$, где $d(t)$ - дельта – функция Дирака [4]. Единичный импульс силы будет равен $I_0 = mV_1$, где $V_1$ определяется выражением (4).

СЛУЧАЙ 4. Рассмотрим перемещение тела $m$ по дуге $S$ окружности радиуса $r_0$. Если использовать выражение для работы (4а) с использованием гравитационного потенциала, то формально получаем $A_0 = 0$, так как в данном случае $j_1 = j_0$. Но это неверное заключение, не работа $A_0 = 0$, а ЭТА РАБОТА НЕ МОЖЕТ БЫТЬ СОВЕРШЕНА СИЛАМИ ДАННОГО ПОЛЯ. Для перемещения тела по дуге окружности необходимо действие двух сил: удерживающей силы $F_y = -F_3$, которая предотвращает свободное падение тела, и перемещающую силу $F_T$, направленную по касательной. Работа постоянной перемещающей силы $A_T = F_T S = F_T^2 t^2 / 2m$. Работа удерживающей силы $A_y = F_y^2 t^2 / 2m$, где $t$ - время перемещения. Поскольку силы $F_T$ и $F_y$ взаимно перпендикулярны, то работы этих сил аддитивны, т.е. суммарная работа $A_\Sigma = A_T + A_y$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:


Иванов Е.М. Работа и энергия в классической механике и I закон термодинамики // Фундаментальные исследования, №8, 2005, с. 11.

Иванов Е.М. Работа при движении тел с трением // Фундаментальные исследования, №6, 2005, с. 10.

Иванов Е.М. Определение работы и работа силы трения // Успехи современного естествознания. №8, 2005, с. 10.

Арсенин В.Я. Математическая физика.- М.: Наука, 1966.

**Work of forces in a gravitational field**

Ivanov E.M.
Dimitrovgrad Institute of Technology, Management and Design

If work of force of gravitation $F_3 = GMm/r^2$ at free falling a body $m$ from $r_0$ up to $r_1$ is equal $A_0 = m(j_1 - j_0)$, where $j = GM / r$ - gravitational potential work of foreign forces for moving a body to an opposite direction $A_c$ always is much greater $A_0$. And only in an ideal (theoretical) case at action of instant force as $I_0 d(t)$, we receive $A_c \to A_0$. $I_0 = mV_1$ - an individual pulse of force, $d(t)$ - delta - function, $V_1$ - speed of a body at the end of free falling.