УДК 538.4

КОНВЕКТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Тактаров Н.Г.
Мордовский государственный университет, Саранск

Рассматривается вывод уравнений конвективного движения неравномерно нагретой намагничивающейся жидкости в немагнитной пористой среде – матрице под действием силы тяжести и неоднородного магнитного поля.

Предполагаем, что пористая матрица заполнена жидкостью целиком и статистически изотропна. Тепловым расширением матрицы по сравнению с расширением жидкости, приводящим к конвективному движению, и фазовым переходом, связанным с адсорбцией твердых частиц ферромагнетика из жидкости на поверхности пор и вызывающим изменение конфигурации матрицы, будем пренебрегать. Последнее требует специального рассмотрения.

Уравнения движения намагничивающихся жидкостей в пористых средах имеют вид [1]:

$$e_a \langle r_a \rangle^a \partial \langle u_{ia} \rangle^a / \partial t + e_a \langle p_a \rangle^a \langle u_{ja} \rangle^a \nabla_j \langle u_{ia} \rangle^a + \nabla_i \left(e_a A \langle r_a \rangle^a \langle u_{ja} \rangle^a \langle u_{ja} \rangle^a \right) +$$

$$+ \nabla_j \left(e_a C \langle r_a \rangle^a \langle u_{ia} \rangle^a \langle u_{ja} \rangle^a \right) = -e_a (1+F_1) \nabla_i \langle p_a \rangle^a + e_a (1+F_2) \langle M_{ja} \rangle^a \times$$

$$\times \nabla_j \langle H_{ia} \rangle^a + e_a \langle r_a \rangle^a g_i + h\Delta \left(e_a \langle u_{ia} \rangle_a \right) - h e_a D \langle u_{ia} \rangle^a ;$$

$$r_c c_c \partial \langle T \rangle / \partial t + k_c \Delta T - \nabla_i \left[e_a \langle r_a \rangle^a c_{aH} \langle T \rangle \langle u_{ia} \rangle^a \right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2} h e_a \left[\nabla_i \langle u_{ja} \rangle^a + \nabla_j \langle u_{ia} \rangle^a \right]^2 ;$$

$$\nabla_i \langle B_i \rangle = 0; \; e_{ijk} \nabla_j \langle H_k \rangle = 0; \; \nabla_j \left(e_a \langle u_{ja} \rangle^a \right) = 0; \; \langle M_{ja} \rangle^a = \frac{m_c - 1}{4 p e_a} \langle H_i \rangle . \tag{1}$$

Здесь e_a – пористость матрицы; A, C, D, F_1 и F_2 – скаляры, характеризующие свойства среды; индексом α обозначены величины, относящиеся к жидкости; угловые скобки с индексом α означают локальное объемное усреднение по фазе α [2, 3], а без индекса α – объемное усреднение по смеси (матрица + жидкость); r_c, c_c, k_c, m_c – плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности и магнитная проницаемость смеси [1]; остальные обозначения общепринятые.

Усредненное по смеси магнитное поле $\langle \overline{H} \rangle$ и индукция $\langle \overline{B} \rangle = m_c \langle \overline{H} \rangle$ находятся из усредненных по смеси уравнений Максвелла. Усредненная по объему, занятому жидкостью, намагниченность выражается через $\langle \overline{H} \rangle$. Магнитная проницаемость смеси m_c предполагается известной функцией от e_a, $\langle r_a \rangle^a$, $\langle \overline{H} \rangle$, $\langle T \rangle$.

Перейдем к определению усредненного по объему, занятому жидкостью, поля $\langle \overline{H}_a \rangle^a$, входящего в первое уравнение (1).

Усредняя по фазе α уравнение $div\overline{B}_a = 0$, будем иметь:

$$div \langle \overline{H}_a \rangle^a + 4p\,div \langle \overline{M}_a \rangle^a +$$

$$+ \frac{1}{V_a} \int\limits_{\Sigma_{ab}} n_a \left(d\overline{H}_a + 4p d\overline{M}_a \right) d\Sigma . \tag{2}$$

Здесь V_a – объем усреднения, занятый жидкостью; Σ_{ab} – поверхность раздела фаз α и β (индекс β относится к матрице) в объеме усреднения V; $\overline{n}_a$ – нормаль к Σ_{ab}, внешняя для фазы α; $dA = A - \langle A_a \rangle^a$.

Поверхностный интеграл в формуле (2) отличен от нуля только в том случае, когда $\overline{H}_a \neq \langle \overline{H}_a \rangle^a$ и $\overline{M}_a \neq \langle \overline{M}_a \rangle^a$ т.е. когда векторные поля $\overline{H}_a$ и $\overline{M}_a$, а следовательно, и $\left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a$ и $\left\langle \overline{M}_a \right\rangle^a$ неоднородны в пространстве. Таким образом, поверхностный интеграл должен быть функцией от $\nabla_i \left\langle H_{ja} \right\rangle^a + 4p\nabla_i \left\langle M_{ja} \right\rangle^a$, обращающейся в нуль вместе с аргументом.

Разлагая эту функцию в ряд, будем иметь:

$$\frac{1}{V_a}\int_{\Sigma_{ab}} n_a \left(d\overline{H}_a + 4pd\overline{M}_a\right) d\Sigma = c_{ij}\left(\nabla_i \left\langle H_{ja} \right\rangle^a + 4p\nabla_i \left\langle M_{ja} \right\rangle\right) + \mathbf{K}$$

Предполагая функции $\left\langle H_{ja} \right\rangle^a$ и $\left\langle M_{ja} \right\rangle^a$ медленно изменяющимися в объеме усреднения, будем отбрасывать все малые высших порядков в разложении. В случае изотропной пористой среды тензор c_{ij} должен быть изотропным. Единственным изотропным тензором второго ранга является произведение скаляра на единичный тензор d_{ij} [4]. С учетом этого обстоятельства уравнение (2) принимает вид%

$$div\left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a + 4pdiv\left\langle \overline{M}_a \right\rangle^a = 0. \qquad (3)$$

Усредняя по фазе α уравнение $rot\overline{H}_a = 0$, будем иметь%

$$e_{ijk}\nabla_j \left\langle H_{ak} \right\rangle^a + \frac{1}{V_a}\int_{\Sigma_{ab}} e_{ijk} n_{aj} dH_{ak} d\Sigma = 0 \qquad (4)$$

Здесь e_{ijk} – тензор Леви-Чивита.

Разлагая в формуле (4) поверхностный интеграл в ряд, аналогично находим:

$$\frac{1}{V_a}\int_{\Sigma_{ab}} e_{ijk} n_{aj} dH_{ak} d\Sigma = c_{ijk}\nabla_j \left\langle H_{ak} \right\rangle^a + \mathbf{K}$$

Здесь тензор c_{ijk} также должен быть изотропным. Как известно [4], c_{ijk} должен в этом случае равняться произведению скаляра на тензор e_{ijk}. Тогда формула (4) принимает вид $rot\left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a = 0$. Отметим, что, когда поле $\left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a$ сильно изменяется в объеме усреднения, например вблизи проводников с током, проходящих в пористой среде, необходимо учитывать и следующие члены разложения.

Вводя потенциал поля $\left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a$ по формуле $\left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a = -\nabla j$, уравнение (3) можно записать в виде:

$$\Delta j = 4pdiv\left\langle \overline{M}_a \right\rangle^a.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$j = -\int_{V_0} \frac{\mathrm{div}\left\langle \overline{M}_a \right\rangle^a}{r} dV + \int_{\Sigma_0} \frac{n\left\{\left\langle \overline{M}_a \right\rangle^a\right\}}{r} d\Sigma.$$

Здесь $\{a\} = a_1 - a_2$; $\overline{n}$ – внешняя нормаль к объему V_0, занятому пористой средой; Σ_0 – поверхность этого объема; индекс 1 относится к пористой среде, 2 – к окружающему объему.

Отметим, что в случае, когда пористость матрицы мала, нахождение поля $\left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a$ существенно упрощается; тогда имеет место формула [1]:

$$\left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a = \left\langle \overline{H} \right\rangle - \tfrac{4}{3}p\left\langle \overline{M}_a \right\rangle^a. \qquad (5)$$

Если среда находится в состоянии магнитного насыщения, а внешнее приложенное поле $\overline{H}_0$ достаточно велико, можно принять $\left\langle \overline{H} \right\rangle \approx \left\langle \overline{H}_a \right\rangle^a \approx \overline{H}_0$. Далее, при выводе уравнений конвекции, ограничимся этим наиболее важным для практики случаем. Вводя скорость фильтрации $\overline{u} = e_a \left\langle \overline{v}_a \right\rangle^a$, коэффициент проницаемости $K = e_a / D$ [5], опуская для краткости угловые скобки и ограничиваясь случаем медленных фильтрационных течений, уравнения системы (1) запишем в виде:

$$r_a\,\partial\overline{u}/\partial t = -e\left(1+F_1\right)\nabla p + e\left(1+F_2\right)M\nabla H_0 + r_a eg + h\Delta\overline{u} - \overline{u}\cdot\varepsilon\eta/K;$$
$$div\overline{u} = 0; \quad r_c c_c\,\partial T/\partial t = k_c\Delta T - \nabla r_a c_{aH} T\overline{u}. \qquad (6)$$

Во втором уравнении (6) пренебрегается вязкой диссипацией и маг-нитокалорическим эффектом. Отметим также, что слагаемое $h\Delta\overline{u}$ в первом уравнении (6), соответствующее модели фильтрации Бринкмана [5], в случае медленных фильтрационных течений мало.

Применяя к системе (6) известную процедуру вывода уравнений конвекции [6, 7], будем иметь:

$$r_{a0}\,\partial\overline{u}/\partial t = -e\left(1+F_1\right)\nabla p' - e\left(1+F_2\right)\left(d + bgr_{a0}\right)\cdot M_0 T'\nabla H_0 - ebr_{a0}gT' - \overline{u}\cdot\varepsilon\eta/K; \quad \mathrm{div}\overline{u} = 0;$$
$$\frac{\partial T'}{\partial t} = c_c\Delta T' - \frac{r_{a0}c_{aH}}{r_c c_c}\overline{u}\nabla T'. \qquad (7)$$

Здесь $d = -M_0^{-1}\left(\partial M/\partial T\right)_{r_a}$; $b = -r_{a0}^{-1}\left(\partial r_a/\partial T\right)$; $g = M_0^{-1}\left(\partial M/\partial r_a\right)_T$; $c_c = k/r_c c_c$; индексом нуль обозначены постоянные средние значения величин в состоянии механического равновесия, штрихом – отклонения от равновесия.

Далее ограничимся для определенности случаем, когда заданный градиент магнитного поля $\nabla H_0 = -\bar{k}\Gamma$ вертикален ($\bar{k}$ – единичный вектор оси z, направленной вверх). Взяв rot от обеих частей уравнения равновесия (7), когда $\bar{u} = 0$, с учетом уравнения теплопроводности находим, что, как и в обычной гидродинамике [6], необходимое условие равновесия имеет вид $\nabla T' = -\bar{k}A$, где A = const.

Запишем уравнения (7) в безразмерном виде:

$$\frac{1}{e}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla p' + R_{mp}T'\bar{k} - \bar{u};$$

$$L^2 K^{-1} \Pr_e \frac{\partial T'}{\partial t} = \Delta T' - \left(r_a r_c^{-1}\right)\left(c_{aH} c_c^{-1}\right)\bar{u}\nabla T'.$$

Здесь приняты следующие единицы измерения: длины – L – характерный размер задачи; скорости – c_c/L; времени – K/n_a, температуры – AL; давления – $n_a r_a c_c/(1+F_1)K$; $n_a = h/r_a$; $\Pr_e = n_a/c_c$ эффективное число Прандтля; R_{mp} – число Рэлея, имеющее вид

$$R_{mp} = bAKL^2\left(n_a c_c\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot\left[g + (1+F_2)(d + bgr_a)(br_a)^{-1}M\Gamma\right].$$

Отметим, что отсутствие в уравнениях фильтрации, приведенных в монографии [6], скаляров, аналогичных скалярам F_1 и F_2, связано с отбрасыванием поверхностных интегралов по межфазной поверхности $\sum_{ab}$ в процессе усреднения уравнений гидродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тактаров Н.Г. Движение намагничивающихся жидкостей в пористых средах //Магнитная гидродинамика. – 1980. – № 3. – С. 38 – 4 2.

2. Gray W. G. A derivation of the equations for multi-phase transport. — Chem. Eng. Sci., 1975, vol. 30, p. 229 – 233.

3. Gray W. G., O'Neill K. On the general equations for flow in porous media and their reduction to Darcy's law. – Water Resources Research, 1976, vol. 12, N 2, p. 148 – 154.

4. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1969. – 124 с.

5. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. – 352 с.

6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

7. Lalas D. P., Carmi S. Thermoconvective stability of ferrofluids. – Phys. Fluids, 1971, vol. 14, N 2.

CONVECTIVE FILTRATION OF MAGNETIZABLE FLUIDS

Taktarov N.G.
Mordovia state university, Saransk

The derivation of convective filtration equation of irregularly heated magnetizable fluids in non-magnetic porous matrix medium under the influence of the gravity and heterogeneous magnetic field is considered.