

УДК 530.1.076

РАБОТА ПОДЪЕМА ТЕЛА В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Иванов Е.М.

*Димитровградский институт технологии, управления и дизайна,
Димитровград*

Показано, что работа подъема тела в однородном поле тяжести всегда больше величины потенциальной энергии mgh . Величина работы имеет минимум, величина которого зависит от способа подъема тела.

В школьных [1] и вузовских [2-4] курсах физики утверждается, что если тело массы m равномерно поднимать вверх на высоту h с помощью силы $F = mg$, то сила совершает положительную работу $A_F = mgh$, равную потенциальной энергии $\Pi = mgh$, а сила тяжести отрицательную работу $A_P = -mgh$ [1]. Рассматривается также случай бросания тела вертикально вверх с начальной скоростью V_0 , обеспечивающей подъем тела на высоту h на основании закона сохранения и превращения энергии: $K = \Pi$ или $mV_0^2/2 = mgh$. Работу бросания считают равной $A = mgh = mV_0^2/2$. В этих безобидных, на первый взгляд, утверждениях, содержится нечто, противоречащее одному из положений физики. В физике используется понятие КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ (h) – КПД. КПД не может быть больше единицы. КПД всегда меньше единицы, поскольку часть энергии превращается тоже в энергию, но не в ту, что нужна, и поэтому теряется для полезного использования. КПД всегда меньше единицы вследствие самой физической природы вещей и явлений. Если же записать КПД для выше приведенных случаев подъема тела на высоту h , то получим: $h = \Pi/A = mgh/mgh = 1$. Рассмотрим более подробно ряд случаев подъема тела на высоту h .

§ 1. Рассмотрим движение тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью V_0 , за счет действия мгновенной силы в виде $I_0 d(t)$ [5, 6], где $d(t)$ – d – функция Дирака [7, 8]. Величину I_0 будем называть единичным импульсом силы, численно равным количеству движения (импульсу), полученным телом $I_0 = mV_0$. Дифференциальное уравнение движения (II закон Ньютона) имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + mgH(t) = I_0 d(t) \quad (1)$$

при нулевых начальных условиях:

$$x(0) = 0; \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad (2)$$

Где x – вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности Земли. Для решения задачи воспользуемся двусторонним преобразованием Лапласа [9]

$$\bar{X}(s) = s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} x(t) dt, \quad a < \text{Re } s < b \quad (3)$$

Для решения этой задачи используется дифференциальное уравнение для односторонней функции $x^*(t) = x(t)H(t)$, где $H(t)$ – единичная (ступенчатая) функция Хевисайда [8, 9]. Тогда производные функции $x^*(t)$ имеют вид [9]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x^*(t) &= x'(t)H(t) + x(0)d(t); \\ \frac{d^2}{dt^2} x^*(t) &= x''(t)H(t) + x'(0)d(t) + x(0)d'(t) \end{aligned}$$

После соответствующих преобразований, решение получается в следующем виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{I_0}{m} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 & V(t) &= \frac{I_0}{m} \cdot H(t) - gt \\ a(t) &= \frac{I_0}{m} d(t) - gH(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Вычислим работу, совершаемую силами

$$F = ma = I_0 d(t) - mgH(t)$$

$$A_{\Sigma} = \int_0^x F dx = \int_{-\infty}^t [I_0 d(t) - mgH(t)]$$

$$\left[\frac{I_0}{m} dt - gtdt \right] \quad (5)$$

Вычисляя интегралы, получим [9]

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\infty}^t I_0 d(t) \cdot \frac{I_0}{m} dt = \frac{I_0^2}{m}; \\ A_2 &= - \int_{-\infty}^t I_0 d(t) gtdt = 0; \end{aligned}$$

$$A_3 = - \int_{-\infty}^t mgH(t) \frac{I_0}{m} dt = -gI_0 t = -mgV_0 t ;$$

$$A_4 = \int_{-\infty}^t mgH(t) g t dt = \frac{1}{2} mg^2 t^2$$

Работа, совершаемая силами, запишется в виде:

$$A_{\Sigma} = \frac{I_0^2}{m} - gI_0 t + \frac{1}{2} mg^2 t^2 = \frac{I_0^2}{m} - mgx(t) \quad (6)$$

Работа, совершенная единичным импульсом силы $I_0 = mV_0$ (или начальная энергия, полученная телом) будет равна

$$A_0 = \frac{I_0^2}{m} = mV_0^2 = 2K_0 \quad (7)$$

где $K_0 = mV_0^2/2$ - начальная кинетическая энергия тела. Время подъема до максимальной высоты ($V=0$) $t_0 = I_0/mg$, а максимальная высота подъема $h_m = I_0^2/2m^2g = V_0^2/2g$. Подставляя в выражение (6) значение t_0 , получим конечное значение совершенной работы:

$$A_K = \frac{I_0^2}{2m} = \frac{I_0^2}{2m} \cdot \frac{mg}{mg} = mgh_m \quad (8)$$

Поскольку начальная энергия полученная телом $A_0 = 2K_0$, то КПД процесса бросания тела вертикально вверх будет равен

$$h = \frac{A_K}{A_0} = \frac{K_0}{2K_0} = 0,5$$

То, что начальная энергия тела $A_0 = 2K_0$ можно объяснить эффектом удвоения массы (силы тяжести) в случае внезапно приложенной нагрузки при бросании [5, 10].

§ 2. Рассмотрим случай движения тела вертикально вверх под действием постоянной вертикальной силы тяги F_T . Уравнение движения (II закон Ньютона) запишется в следующем виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_T - mg \quad (9)$$

Если $F_T = mg$, то правая часть тождественно равна нулю, и движения тела вверх не происходит, но в этом случае сила давления тела на опору (например, на поверхность Земли) равна нулю, поскольку сила тяги нейтрализует «тяжелую» массу, и тело находится в квазиневесомом состоянии (состояние левитации). Обозначим силу тяги, равную mg , значком "Л": $F_L = mg$.

Если сила тяги больше mg на величину ΔF , то уравнение (9) можно переписать в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_L + \Delta F - mg \text{ или } m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Delta F \quad (10)$$

Таким образом, часть силы тяги $F_L = mg$ не будет принимать непосредственного участия в работе по подъему тела вверх. Тело будет подниматься вверх только благодаря действию силы ΔF с ускорением $a = \Delta F/m$. За время t высота подъема будет равна

$$h = \frac{at^2}{2} = \frac{\Delta F \cdot t^2}{2m} \quad (11)$$

Работа подъема составит величину, равную

$$A_{\Delta} = \Delta F \cdot h = \frac{(\Delta F \cdot t)^2}{2m} \quad (12)$$

Поскольку $\Delta F \cdot t = I_1$ есть импульс силы, численно равный импульсу (количеству движения), полученному телом $I_1 = mV_1$, где V_1 - скорость тела в момент времени t , то можно записать $A_{\Delta} = I_1^2/2m$.

Однако чтобы остановить тело на данной высоте h , необходимо еще совершить работу торможения, численно равную кинетической энергии, приобретенной телом $K_1 = mV_1^2/2$;

$$A_{TP} = \frac{mV_1^2}{2} = \frac{I_1^2}{2m} = \frac{(\Delta F \cdot t)^2}{2m} \quad (13)$$

Отдельного разговора заслуживает вопрос о том, что же делает другая часть силы тяги $F_L = mg$? Ведь она не принимает участия в подъеме тела на высоту h , она лишь нейтрализует силу тяжести, обеспечивая условия левитации. Можно записать баланс импульсов сил в виде:

$$F_T t = F_L t + \Delta F t \quad (14)$$

Возведя обе части равенства в квадрат и разделив на $2m$, получим баланс энергий (работ):

$$\frac{F_T^2 t^2}{2m} = \frac{F_L^2 t^2}{2m} + \frac{\Delta F F_L t^2}{m} + \frac{\Delta F^2 t^2}{2m} \quad (15)$$

Работу, совершаемую силой F_T , можно переписать в следующем виде:

$$A_{\Sigma} = \frac{F_T^2 t^2}{2m} = \frac{1}{2} mg^2 t^2 + g \Delta F t^2 + \frac{\Delta F^2 t^2}{2m} \quad (16)$$

Или, с учетом выражений (11) и (12):

$$A_{\Sigma} = \frac{(mgh)^2}{\Delta F \cdot h} + 2mgh + \Delta F \cdot h \quad (17)$$

Первый член в правых частях выражений (15)–(17) представляет собой работу силы левитации в стационарном (неподвижном) состоянии

$$A_{\text{Л}} = \frac{F_{\text{Л}}^2 t^2}{2m} = \frac{1}{2} mg^2 t^2 = \frac{(mgh)^2}{\Delta F \cdot h} \quad (18)$$

Второй член выражает работу, связанную с ускоренным перемещением силы левитации

$$A_{\text{Ла}} = \frac{\Delta F F_{\text{Л}} t^2}{m} = g \Delta F t^2 = 2mgh \quad (19)$$

Третий член – это обычная работа силы ΔF , обеспечивающей ускоренное движение тела в соответствии со II законом Ньютона:

$$A_{\Delta} = \frac{\Delta F^2 t^2}{2m} = \Delta F \cdot h \quad (20)$$

Произведение работ $A_{\Delta} \cdot A_{\text{Л}} = (mgh)^2$. На рис. 1 показана зависимость величины работы левитации $A_{\text{Л}}$ от величины работы A_{Δ} , выраженных в долях потенциальной энергии mgh .

Выражение (17) имеет минимум, равный $A_{\text{мин}}^{\Sigma} = 4mgh$ при $\Delta F \cdot h = mgh$. На графике (рис. 2) показана зависимость работы A_{Σ} , совершаемой силой тяги F_T , выраженной в долях потенциальной энергии $\Pi = mgh$, от величины соотношения $\Delta F / mg$. Если использовать обычную формулу определения работы подъема тела на высоту h с некоторым ускорением a , то будем иметь $A = m(g + a)h = (F_{\text{Л}} + \Delta F)h$. Ее зависимость от величины соотношения $\Delta F / mg$ показана на графике (рис. 3). Самое нелепое на этом графике то, что при $\Delta F = 0$ совершается работа подъема, равная mgh , хотя, согласно условиям статики, тело должно оставаться неподвижным.

Отрицательная работа, совершаемая силой тяжести при подъеме тела вверх вовсе не равна mgh . Она равна

$$A_P = -\frac{P^2 t^2}{2m} - \frac{\Delta F P t^2}{2m} = -\frac{(mgh)^2}{\Delta F \cdot h} - 2mgh \quad (21)$$

Сумма работ (17) и (21) дает величину

$$A_{\Delta} = \Delta F \cdot h = \frac{mV^2}{2}, \text{ т.е. величину кинетической энергии, приобретенной телом на высоте } h.$$

КПД подъема при $A_{\text{мин}}^{\Sigma} = 4mgh$ без учета работы торможения составляет $h = 0,25$.

§3. Тело находится в состоянии левитации (приложена сила тяги $F_T = F_{\text{Л}} = mg$). Для того, чтобы тело двигалось вверх, в начальный момент времени на тело действует направленный вверх единичный импульс силы $I_1 = mV_1$. В этом случае дифференциальное уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + mgH(t) = I_1 d(t) + F_{\text{Л}} H(t) \quad (22)$$

при нулевых начальных условиях. Решая уравнение с помощью преобразования Лапласа, получим

$$X = \frac{I_1}{m} \cdot t + \frac{F_{\text{Л}}}{2m} t^2 - \frac{P}{m} t^2 \quad (23)$$

Вычисляем работу, совершаемую всеми силами

$$A = \int_0^h F dx = \int_0^{t_1} [I_1 d(t) + F_{\text{Л}} H(t) - PH(t)] \cdot \left[\frac{I_1}{m} dt + \frac{F_{\text{Л}}}{m} t dt - \frac{P}{m} t dt \right] \quad (24)$$

где $P = mg$, а t_1 – время движения до высоты $h = V_1 t_1$. Вычисляя интегралы, выделим положительную и отрицательную работы

$$A_{\Sigma} = A_{+} = \frac{I_1^2}{m} + \frac{I_1 F_{\text{Л}} t}{m} + \frac{F_{\text{Л}}^2 t^2}{2m} \quad (25)$$

$$A_{-} = -\frac{I_1 P t}{m} - \frac{P F_{\text{Л}} t^2}{2m} \quad (26)$$

Преобразуем выражения, входящие в (25)

$$\frac{I_1^2}{m} = mV_1^2 = 2K_1, \quad \text{где } K_1 = \frac{mV_1^2}{2}$$

$$\frac{F_{\text{Л}}^2 t^2}{2m} = \frac{1}{2} mg^2 t^2 = \frac{1}{2} mg^2 \frac{h^2}{V_1^2} = \frac{(mgh)^2}{2mV_1^2} = \frac{(mgh)^2}{4K_1}$$

$$\frac{I_1 F_{\text{Л}} t}{m} = F_{\text{Л}} V_1 t_1 = F_{\text{Л}} h = mgh$$

Тогда суммарную положительную работу (работу подъема) можно записать в виде

$$A_{\Sigma} = 2K_1 + mgh + \frac{(mgh)^2}{4K_1} \quad (25a)$$

Эта работа имеет минимум, равный $A_{\text{мин}} = (1 + \sqrt{2})mgh$ при величине $2K_1 = mgh / \sqrt{2}$. График зависимости суммарной работы подъема A_{Σ} в зависимости от величины $2K_1$, выраженных в долях потенциальной энергии $\Pi = mgh$, показана на графике (рис. 4). Отрицательная работа, совершаемая силой тяжести (27), может быть представлена в виде:

$$A_{\text{н}} = -mgh - \frac{(mgh)^2}{4K_1} \quad (26a)$$

При больших значениях начального импульса ($K_1 \gg mgh$) она асимптотически стремится к своему обычному значению $A_{\text{н}} = -mgh$.

Величина энергии, приобретенной в результате ударного нагружения мгновенным импульсом силы $I_1 = mV_1$, равна $2K_1 = mV_1^2$. Двойная энергия $2K_1$ является результатом удвоения массы при внезапно приложенной нагрузке (в рамках модели материальной точки). В рамках реального упругого тела половина энергии идет на возбуждение упругих колебаний, которые вследствие дисперсии и внутреннего трения с течением времени затухают, переходя во внутреннюю энергию (тело нагревается).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика: Учеб. для 9 кл. средн. шк. – М.: Просвещение, 1990.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. – М.: Наука, 1989.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. Учебн. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1989.
4. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебн. пособие для физ. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1986.
5. Иванов Е.М. Дополнительные главы классической механики: - Димитровград: ДИТУД УлГТУ, 2004.
6. Иванов Е.М. Работа центростремительных и гироскопических //Успехи современного естествознания, № 9, 2004.
7. Арсенин В.Я. Математическая физика. – М.: Наука, 1966.
8. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.
9. Б. Ван Дер Поль, Х. Бреммер. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. - М.: Изд. Иностран. Лит. 1952.
10. Иванов Е.М. Закон инерции Галилея (I закон Ньютона) //Вестник ДИТУД, № 1, 2003.

THE WORK OF LIFTING A BODY IN HOMOGENEOUS FIELD OF GRAVITY

Ivanov E.M.

Dimitrovgrad institute of technology, management and design.

We demonstrate, that the work of lifting a body in homogeneous field of gravity always larger than quantity of potential energy mgh . Quantity of work has minimum.