ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТОЧНИКЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ

Кармазин В.Н., Лебединцев В.Н., Кармазин А.В.
Кубанский государственный университет
Краснодар, Россия

INVERSE PROBLEMS ABOUT SOURCE OF POLLUTION

Karmazin V.N., Lebedintsev V.N., Karmazin A.V.
Kuban State University
Krasnodar, Russia

Для описания процесса распространения загрязняющих вдоль оси ветра примесей в приземном слое атмосферы от распределенного наземного источника используем одномерное уравнение диффузии-переноса [1,2]:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+v\frac{\partial q}{\partial x}+a\,q=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial q}{\partial x}\right)+F(x,t),\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1,$$

$$q\,|_{x=0}=0,\ q\,|_{x=l}=0,\ q\,|_{t=0}=0.$$

В рассматриваемой модели предполагается, что на границах области находятся поглотители примеси, например, водоемы и на начальный момент времени загрязняющая примесь в области отсутствует.

Прямая задача состоит в определении поля концентрации $q(x,t)$ при заданных условиях. Обратная задача об источнике состоит в отыскании $F(x,t)$ по заданному полю концентрации $q(x,t)$.

Пусть $F(x,t)$ представима в виде $F(x,t)=f(x)g(t)$, где $f(x)$ - функция, характеризующая расположение источников и $g(t)$ - интенсивность действия источников.

Рассмотрим обратную задачу об источнике с переопределением в точке. Будем искать $g(t)$ при известной функции $f(x)$ и дополнительном условии - переопределении в точке $q\,|_{x=x^*}=j\,(t)$. На практике это означает, что в некоторой точке установлен датчик, замеряющий концентрацию примеси.

Наложим ограничения на функцию $f(x)$: $f(x^*)\neq 0$, т.е. точка замера находится в зоне действия источника, $f(x)\in C^2\left[0,1\right]$ и $f(0)=f(1)=0$. Известно, что так поставленная обратная задача является корректной [3].

Для упрощения этой задачи был осуществлен переход к новой функции $q(x,t)=f(x)G(t)+w(x,t)$, где $G(t)=\int_0^t g(t)\,dt$. Такая замена приводит к нагруженному уравнению:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+v\frac{\partial w}{\partial x}+a\,w=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial w}{\partial x}\right)-G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{df}{dx}\right)-v\frac{df}{dx}-a\,f\right],\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1,$$

$$w\,|_{x=0}=0,\ w\,|_{x=l}=0,\ w\,|_{t=0}=0,$$

где $G(t)=\dfrac{j\,(t)-w(x^*,t)}{f(x^*)}$.

Проведены квазиреальные эксперименты: при известных $f(x)$ и $g(t)$ решается прямая задача и находится концентрация в точке замера, а затем решается обратная задача при известной функции $f(x)$ и вычисленной функции $j\,(t)$ в точке замера. Для численного решения прямой и обратной задач в программе была использована явная схема по временной переменной и неявная схема по пространственной переменной. Квазиреальные эксперименты проводились для различных функций $f(x)$ и $g(t)$.

Для проверки устойчивости полученного численного решения $g(t)$ в концентрацию в точке замера была внесена ошибка, случайно распределенная по нормальному закону. В среднем качественная картина поведения восстановленной функции $g(t)$ осталась прежней.

Таким образом, в ходе квазиреальных численных экспериментов было показано, что сформулированная выше специальная обратная задача для источника имеет устойчивое численное решение.

Кроме того, был рассмотрен случай наличия нескольких точек замера концентрации загрязняющей примеси. В ходе численных экспериментов обнаружено, что при разумном расположении точек замера, результаты для нескольких датчиков всегда лучше, чем для одного.

Рассмотрим обратную задачу об источнике с финальным переопределением. Будем искать функцию $f(x)$ по известной функции $g(t)$ и дополнительному условию - финальному переопределению $q|_{t=1} = y\,(x)$. Такую задачу можно трактовать как задачу точечного управления или как задачу типа "прогноз-управление" [3].

Для поставленной задачи проведены квазиреальные эксперименты: при известных $f(x)$ и $g(t)$ решается прямая задача и находится концентрация в финальный момент времени $y\,(x) = q(x,1)$, а затем решается корректная обратная задача при известных функциях $g(t)$ и $y\,(x)$ [3].

Проведены численные эксперименты для различных конфигураций функции $f(x)$. Была промоделирована ситуация с добавлением в финальное измерение случайной ошибки. При этом уменьшение дисперсии ошибки влекло уменьшение погрешности при восстановлении функции $f(x)$, что указывает на устойчивость численного решения сформулированной задачи.

Решение рассмотренных в работе обратных задач может быть использовано для минимизации вреда от загрязняющих источников путем их оптимального размещения.

Список литературы

[1] *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982

[2] *Берлянд М.Е.* Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1985.

[3] *Karmazin W., Lebedinzew W., Karmazin A.* Die inverse Aufgabe fur die Gleichung der Turbulenz diffusion// Environmental Problems and Ecological Safety: Proceedings of a workshop held at the University of Applied Sciences Wiesbaden, Germany, September 29 - October 1, 2004. Wiesbaden: Fachhochschule Wiesbaden, 2004. с.116-121.